云端脚下

从一元二次方程到规范场论

De Equazione Algebrica zur Eichtheorie

曹則賢

2021. 12. 31

中国科学院 • 物理研究所

量子力学(2019); 相对论(2020)；规范场论(2021)

这是一个技术超越神话的时代！

这是一个科学深入人心的时代！

学科学→→ 请！当！真！

学科学的细节、思想、方法、体系，

学科学的构建、批判、表述。

吃鸡腿，而不是喝鸡汤

学科学家，就学他们如何学习与创造。

Leonardo Fibonacci, 1202年撰写 ***Liber Abaci*** **(**算书**)** 一书，向西方传播印度-阿拉伯的数字系统；1220年出版***Practica geometriae***（几何实操)，1225出版 ***Flos*** **(**花**)**，***Liber quadratorum*** (平方).

Leonardo Fibonacci，ca.1170-1240/50

自然科学符号：印度-阿拉伯数字，拉丁字母，希腊字母

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

杨振宁，1922年生，著名物理学家

Q: 杨振宁先生最引以为傲的成就是什么？

A： 1954， Yang-Mills 理论。

那是非阿贝尔**规范场论**第一篇。

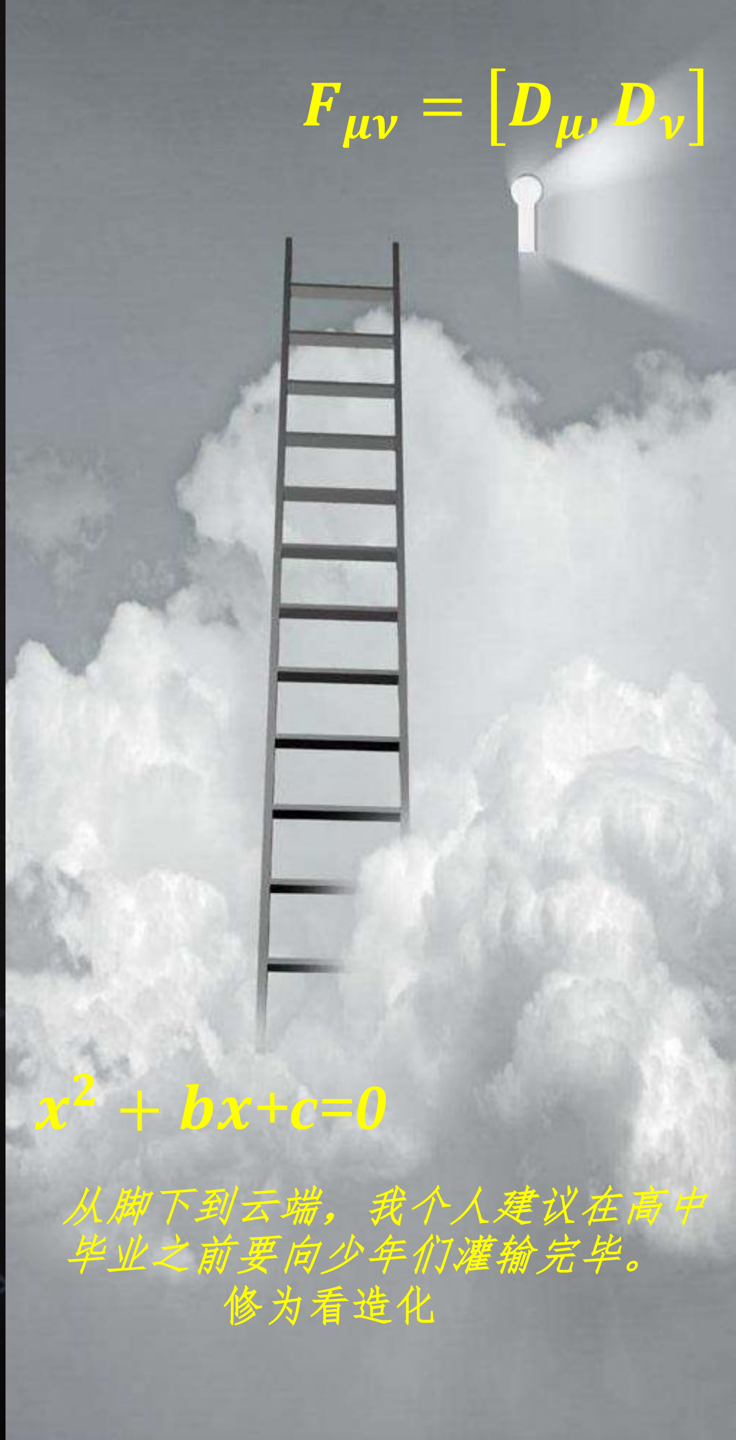
愚以为，对科学巨擘稍具一点儿诚意的尊敬，是去弄懂他到底做了什么。

内容提要

- ➢ 两句闲话
- ➢ 一元二次方程
- ➢ 一元三次、四次方程
- ➢ 一元五次方程代数不可解
- ➢ 数系：二元数、四元数、八元数
- ➢ 群论
- ➢ 规范场论
- ➢ 结语

知识是蚂蚱，得串起来

相信你自己！
我都能站着讲完，
您还不能躺着听完？



本报告沉淀了
主讲人曹则贤
40多年的不懂

这是一场向思想者的致敬之旅。

不用担心听不懂，重要的是你要听说过！

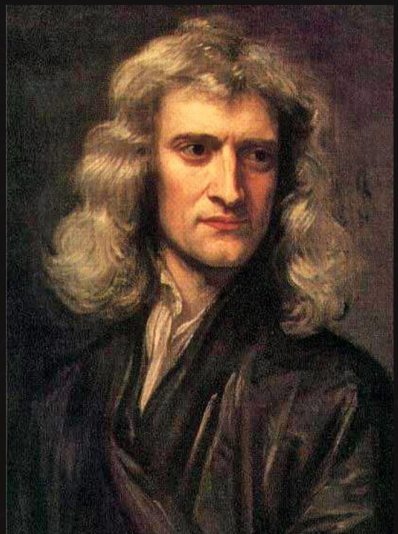
本报告的PPT文件，一如既往，将由物理所公众号发布。

关注2022年1月2日的物理所公众号

一个受人尊重的民族

不妨为人类贡献一点儿数学和物理！

没有创造，天才便不可原谅！


物理学家用方程唱歌

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=f\left(x,\frac{dx}{dt};t\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=0$$

$$H+\partial S/\partial t=0$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi$$

$$\mathrm{dU}=\mathrm{TdS}-\mathrm{pdV}+\sigma\mathrm{dA}+\sum_{\mathrm{i}}\mu_{\mathrm{i}}\mathrm{dN}_{\mathrm{i}}+\vec{\mathrm{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{\mathrm{P}}+\overleftrightarrow{\mathrm{H}}:\mathrm{d}\overleftrightarrow{\mathrm{M}}$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$$

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{B}=0$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\overleftrightarrow{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\overleftrightarrow{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

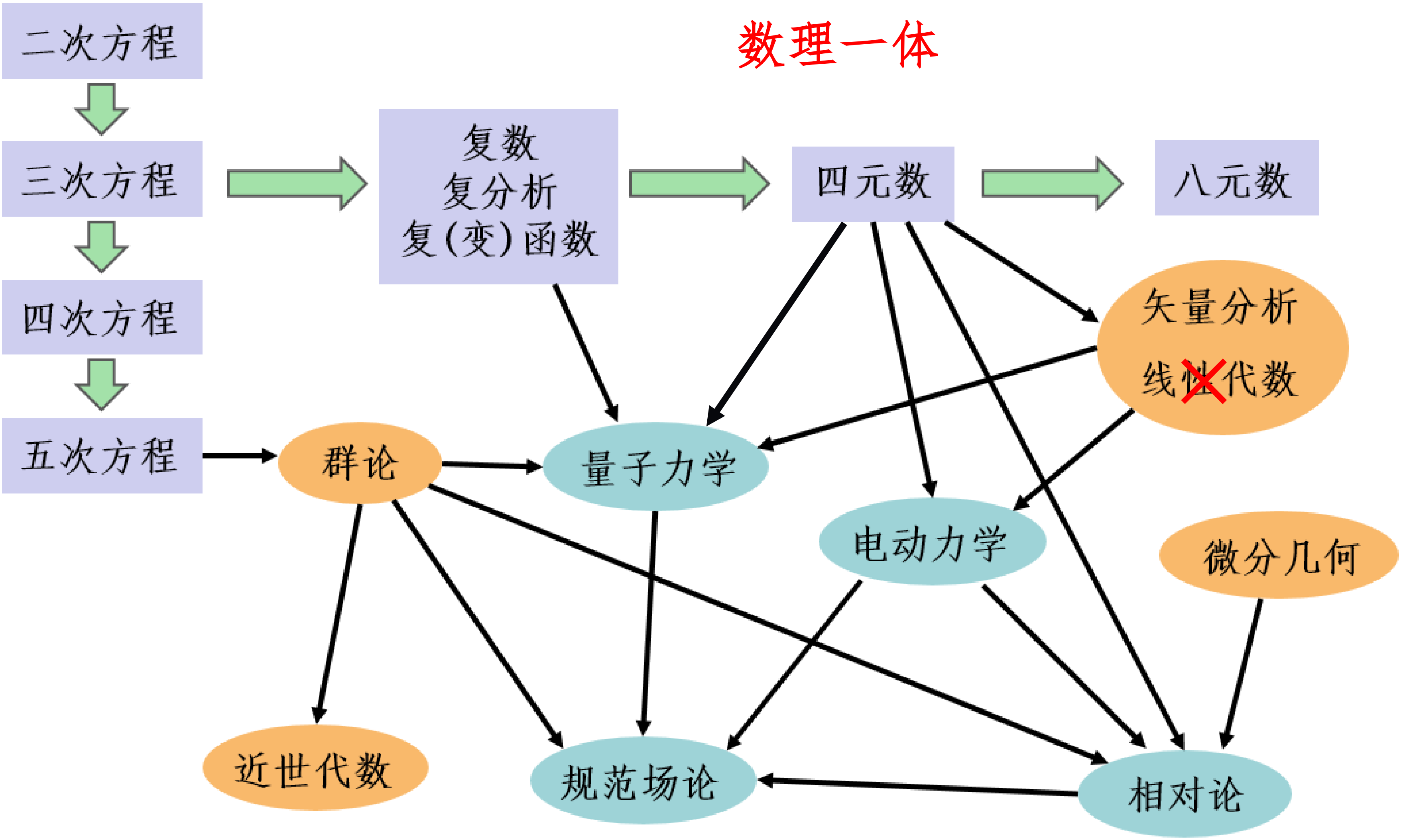
庞加莱引理

$$\mathrm{i}\gamma\cdot\partial\psi=\mathrm{m}\psi$$

$$R_{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}Rg_{\mu\nu}=8\pi GT_{\mu\nu}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2}+\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{\mathrm{dx}^\rho}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{dx}^\sigma}{\mathrm{d}\lambda}=0$$

从一元二次方程到规范场论



本书涉及的部分代表性表达式罗列如下：

一元二次方程：$x^2+bx+c=0$，解为 $x_{1,2}=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}$。形式解为

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\{(x_1+x_2)+[\pm1\times\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}]\}$$

一元三次方程：$x^3+px+q=0$，解之一为

$$x_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$$

复数：$z=a+ib$，$z=re^{i\theta}$（其中 $i^2=-1$），$z=\begin{pmatrix}x & -y\\ y & x\end{pmatrix}$，$z=x+\sigma_1\sigma_2 y$

四元数：$q=a+bi+cj+dk$，$q=\begin{pmatrix}a+ib & c+id\\ c-id & a-ib\end{pmatrix}$

八元数：$x=x_0e_0+x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4+x_5e_5+x_6e_6+x_7e_7$

群最大正规子群合成列：$G=H_0\supset H_1\supset\cdots\supset\{e\}$

规范理论：

$$A\to A'=A+\nabla\chi$$

$$\varphi\to\varphi'=\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}$$

$$\psi\to\psi'=\psi\exp(ie\chi/\hbar c)$$

$$\gamma=\frac{h}{2\pi\sqrt{-1}}$$

$$D_\mu=\partial_\mu+\Gamma_\mu(x)+\frac{ie}{\hbar c}A_\mu(x)$$

$$F=\partial\wedge A+A\wedge A$$

$$F_{\mu\nu}=[D_\mu,D_\nu]$$

标准模型：$SU(3)\times SU(2)\times U(1)$

能将这些表达式各自的相关内容补齐，把故事用公式从 $ax^2+bx+c=0$ 一路讲到 $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$，是本书对作者本人、对读者的预期。

法则，结构，型，表示，才是数学最威猛的地方。

$$x^2+bx+c=0$$

$$x^2=\pm1$$

$$bx+c=0$$

二次型＋一次型
结构

z=a + bi; $z=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$; $z=a+b\sigma_1\sigma_2$

q=a+ bi + cj +dk; $q=\begin{pmatrix}a+ib & c+id\\ c-id & a-ib\end{pmatrix}$

运算法则
表示

$S_5\,(120)\rhd A_5(60)\rhd\{e\}\quad(1)$

结构
表示

$$L_1=-\vec{B}^\alpha\vec{s}_\alpha$$

$$L_2=-\frac{1}{4}f_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta},$$

$$\vec{F}^{\alpha\beta}=\partial^\alpha\vec{B}^\beta-\partial^\beta\vec{B}^\alpha-q[\vec{B}^\alpha,\vec{B}^\beta]$$

二次型＋一次型
结构，微分版

关于代数方程的两个关键词

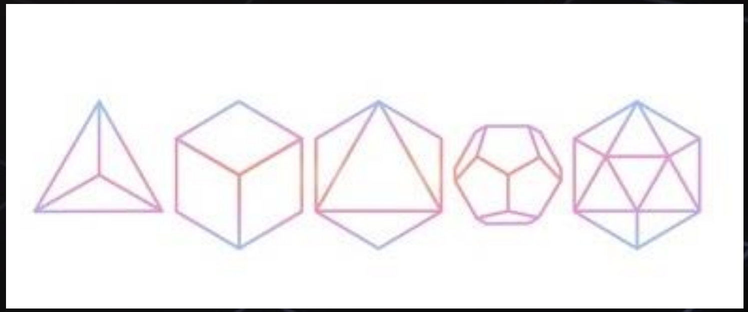
置换

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4, & 3, & 2, & 5, & 6, & 1 \end{array}$$

交替 欧拉公式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 1 & & 2 & & 3 \\ V & - & E & + & F & - & S = 1 \end{array}$$

$$\{+, \ -, +, -\}$$



一元二次方程

$ax^2 + bx + c = 0$

$x^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

al-Khwarizmi，约780-850

$b^2 - 4c < 0$ 方程无解

Discriminant $\Delta = b^2 - 4c$有何深意？

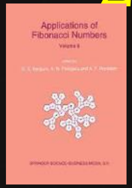
$\sqrt{-1} = i$?

你想多了！

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left\{(x_1 + x_2) + \left[\pm 1 \times \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}\right]\right\}$$

一元二次方程

$x^2 - x - 1 = 0$　　$\phi = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$　　黄金分割数　10-次转动



$x^2 - 2x - 1 = 0$　　$\sigma = 1 \pm \sqrt{2}$　　白银分割数　8-次转动

$x^2 - 4x + 1 = 0$　　$\mu = 2 \pm \sqrt{3}$　　白金分割数　12-次转动

正二十面体、C60 对称性，(532）群，一元五次方程，8-，10-，12-次准晶…

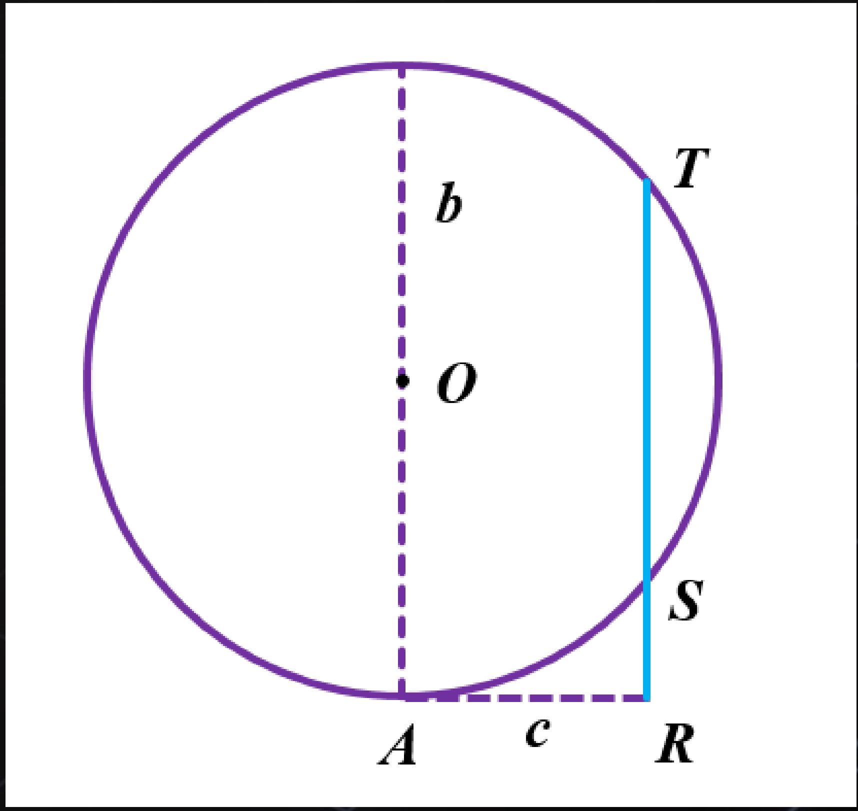
一元二次方程

$x^2 - bx + c^2 = 00$　　x, b, c 可作为长度

$b^2 - 4c > 0$，　相割

$b^2 - 4c = 0$，　相切

$b^2 - 4c < 0$，　错过！　好象有了意义啦！



想你，还不是因为错过了你。
‘Tu me manques’ since I missed you.

一元二次方程

$$x^2+bx+c=0$$

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\left\{(x_1+x_2)+\left[\pm 1\times\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\right]\right\}$$

$$(x-x_1)(x-x_2)=0$$

Alternating

$$x^2-s_1x+s_2=0$$

Permutation

$$x_1+x_2=s_1\text{，}\quad x_1x_2=s_2.$$

Difference of roots，squared

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2\text{-}4x_1x_2$$

$$x_1-x_2=\sqrt{s_1^2-4s_2}$$

根用根自身来表示，一种看问题哲学的转变。

那么，解公式又是由什么决定的呢？方程的结构！

一元二次方程

$$x^2 + bx + c = 0$$

$$x^n + y^n = z^n$$

$x^2 = c_1, \qquad bx = c_2$ 加法与乘法的叠加、兼容问题!

$x^2 = \pm 1$ 不连通的两个世界，补 or正交?

物理地看一元二次方程

ça suffit !

$$x^2 + bx + c = 0 \xrightarrow[\text{Tschirnhaus Transform}]{\text{位移}} x^2 = c_1 \xrightarrow[\text{Rescaling}]{\text{尺度变换}} x^2 = \pm 1$$

一元三次方程

求3 × 3矩阵本征值

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Van der Waals 气体状态方程

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT$$

$$x^3+bx^2+cx+d=0 \quad \to\to \quad x^3+px+q=0$$

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$$

得此一根，即得余下两根

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

3，2 来自量纲

一元三次方程

$$\boldsymbol{x^3 + px + q = 0}$$

设 $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$　　啥意思？两自由度，等价

$$(u + v + q) + \left(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}\right)\left(3\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v} + p\right) = 0$$

$$u + v + q = 0$$
$$3\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v} + p = 0$$

$$u^2 + qu - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$　　一元二次方程

$$u = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} \qquad v = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}$$

Girolamo Cardano, 1501-1576

关键：约化成
一元二次方程

一元三次方程

$$x_1 = 1 \times \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + 1 \times \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

$$x_2 = \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

$$\omega = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

分圆
方程

$$x_3 = \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

$x^3=1$ ； $x=1,\ \omega,\ \omega^2$

三次解是**根号套根号**，和分圆方程$x^3=1$的根**组合**而来的，而$x^3=1 \leftrightarrow x^3=-1$ 是联通的

一元三次方程

$$x^3 + px + q = 0$$

设　$x = \mathrm{u} + \mathrm{v}$

$$u^3 + v^3 = -q$$

$$u^3 v^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3$$

$$u^2 + qu - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$ 一元二次方程

关键：约化成
一元二次方程

约化，会是一个普适的方法吗？

一元三次方程

考察 $x^3 - 15x - 4 = 0 \qquad x = 4$

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

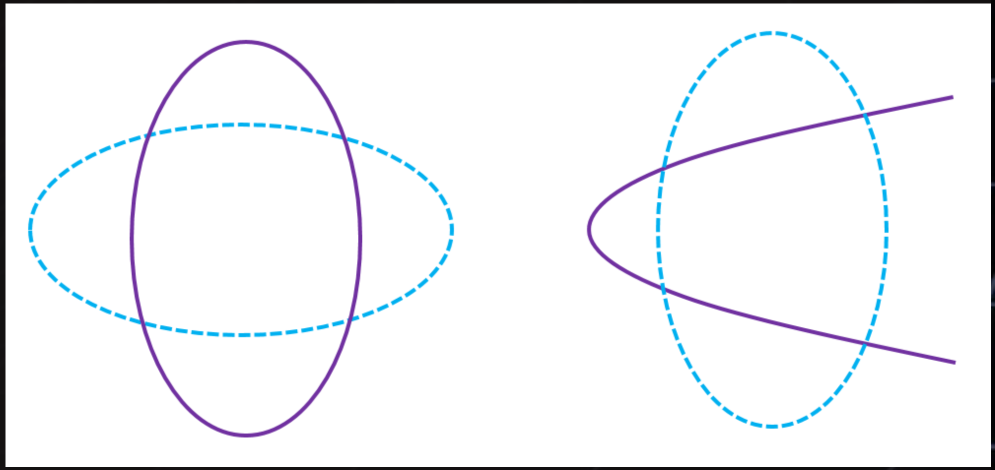
$$(2\pm\sqrt{-1})^3 = 2\pm\sqrt{-121}$$

在1572年出版的L'Algebra (代数) 一书中，邦贝里建议为了求得三次方程的实根，至少可以临时接受负数平方根的存在。虚数(imaginary number)是瑞士数学家欧拉1777年给取的名字。

$$\sqrt{-1} = i$$

一元四次方程

求双曲线的交点



$$x^4 + cx^2 + dx + e = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{c}{2} + m\right)^2 = m^2 + cm + 2mx^2 - dx - e + \frac{c^2}{4}$$

$$(-d)^2 - 4 \times 2m\left(m^2 + cm + \frac{c^2}{4} - e\right) = 0 \ \rightarrow\rightarrow \ \left(x^2 + \frac{c}{2} + m\right)^2 = \left(\sqrt{2m}x - \frac{d}{2\sqrt{2m}}\right)^2$$

关键： 四次方程约化为三次方程。这个配平方的法子带不来什么学问

一元四次方程

$$x^4 + cx^2 + dx + e = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -b\ (=0)$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = c$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -d$$

$$x_1x_2x_3x_4 = e$$

Lagrange, 1736-1813

用现代语言说，根据克莱因群，
做根的线性组合

$$s_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$s_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$$

$$s_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$$

$$s_4 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$$

$$\cancel{(s^2 - s_1^2)}\,(s^2 - s_2^2)(s^2 - s_3^2)(s^2 - s_4^2) = 0$$

$$(s^2 - s_2^2)(s^2 - s_3^2)(s^2 - s_4^2) = 0$$

$$(s^2)^3 + 2c(s^2)^2 + (c^2 - 4e)s^2 - d^2 = 0$$

看似六次，实则三次方程。
得到 s_1，s_2，s_3 ，s_4

一元四次方程

拉格朗日的著作

- *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* 1771.

  关于代数方程解的思考,　Ce mémoire a **inspire** Abel et Galois

- Recherches d'arithmétique/算术研究, 1773 et 1775.

- *Mécanique analytique/分析力学* (1788).

- *Traité des fonctions analytiques/解析函数论.*

Lagrange, 1736-1813

规范场论的根基

$$\mathcal{L}, \quad \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

Lagrange once said: Newton was the greatest genius that ever existed, and the most fortunate, for we cannot find more than once a system of the world to establish.

—F. R. Moulton, *Introduction to Astronomy*

一元四次方程

$$x^4 + \mathrm{b}x^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3, +x_4 = \text{-b}$$

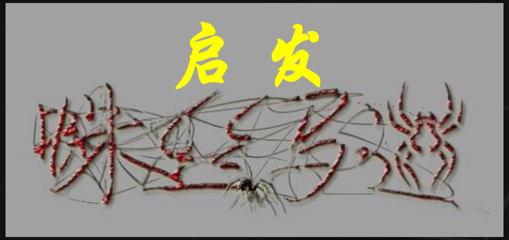
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = +c$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -d$$

$$x_1x_2x_3x_4 = +e$$

基本对称多项式

交 替



根据克莱因群，做根的线性组合

$$s_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$s_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$$

$$s_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$$

$$s_4 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$$

群？

等待Galois

解式

Solvent

$$(s^2 - s_2^2)(s^2 - s_3^2)(s^2 - s_4^2) = 0$$

将解方程转变为对方程本身的认识!

一元五次方程

Bring 形式 $x^5 + px + q = 0$

Euler 发现可解 $x^5 - 5px^3 + 5p^2x - q = 0$

法国人Vandermonde (1735-1796)和英国人Waring (1736-1798) 怀疑到底五次多项式方程是否也有表达看起来挺对称的那种通解。拉格朗日捡起了这个思想，才有了Réflexions sur la Résolution Algébrique des Équations。他认识到方程的性质及其可解性依赖于根的置换对称性，方程可解在于找到方程根的某种置换不变的函数。

根未知，还全包括，那就得置换对称。所有的根是等价的!

$3 > 2$？ 就方程$(x-3)(x-2)=0$ 而言，$3 \equiv 2$ **证有易，证无难!**

代数方程的形式： $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)=0$

一元五次方程

代数方程的形式：$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)=0$

Alternating

$$\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)=0 \qquad x^n+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i s_i x^{n-i}=0$$

$$\delta=\prod_{j<k}(x_j-x_k) \qquad \Delta=\delta^2$$ 是discriminant, 判别式

拉格朗日将n-次多项式方程根与分圆方程$x^n=1$的n个根作为矢量求内积后求其n次方

二次方程 $(x_1-x_2)^2$ 2个根2种置换只得出 1个值

三次方程 $(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)^3$ 3个根6种置换只得出 2个值

四次方程 $(x_1+ix_2+i^2x_3+i^3x_4)^4$ 4个根24种置换只得出3个值

$x^n=1$

五次方程 $(x_1+\zeta x_2+\zeta^2 x_3+\zeta^3 x_4+\zeta^4 x_5)^5$； **5**个根120种置换得出**24**个值

一元五次方程

1799年，意大利人Ruffini (1765-1822) 发表了两卷本、共516页的Teoria Generale delle Equazioni (方程的一般理论)

1824年，挪威人Niels Abel (1802-1829) 证明了五次代数方程通用求根公式不存在。

Abel-Ruffini 定理：“五次及五次以上的一般多项式方程没有根式通解 (general solution in radicals)，即用加减乘除和有限根式表达的解。

约1830年，法国数学天才伽罗华彻底解决了五次多项式方程何时可以有根式解的问题。1846年，在伽罗华辞世14年之后，他的这一伟大成果才终见天日。伽罗华首次提出了群(Groupe)的概念，并最终利用群论解决了这个世界难题。

1870年, 法国数学家 Camille Jordan (1838-1922)根据伽罗华的思想撰写了Traité des substitutions et des équations algébriques (论置换与代数方程)一书，703页。

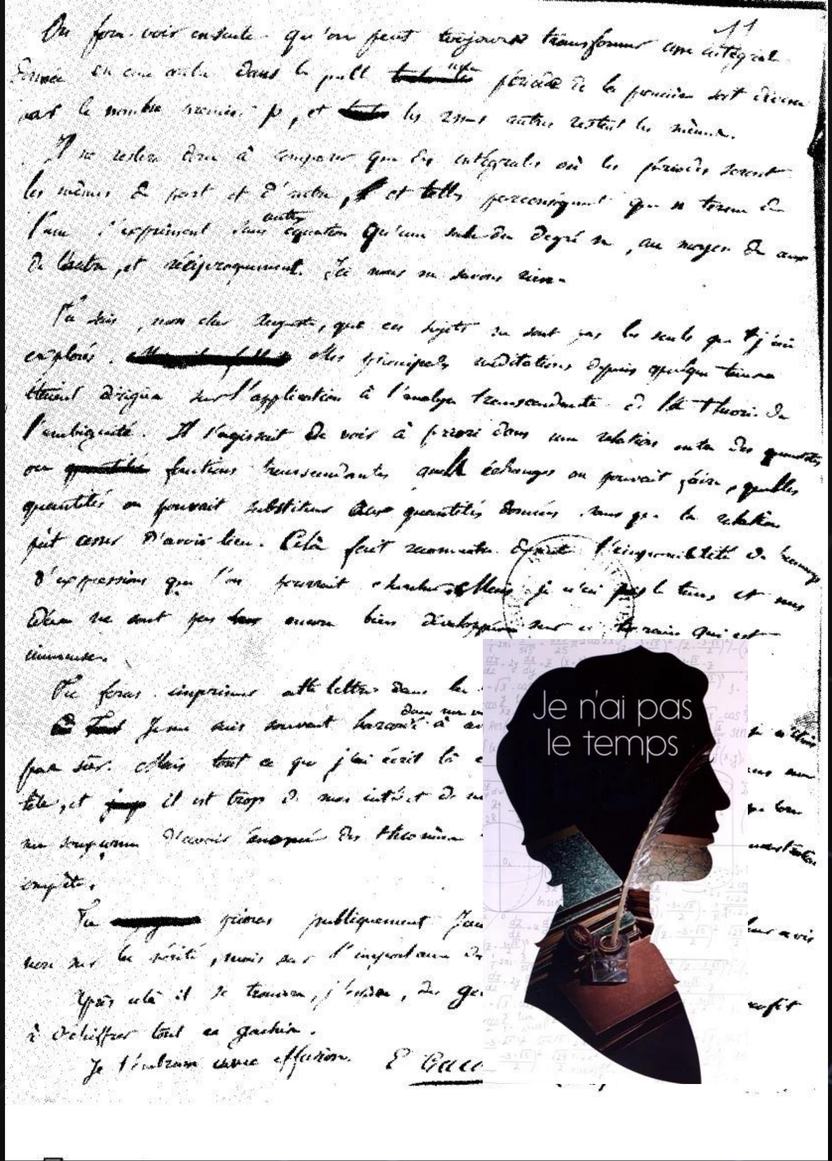
可作为
中学教材

Évariste Galois (1811-1832)

Je n’ai pas le temps

Ne pleure pas, Alfred ! J‘ai besoin de tout mon courage pour mourir à vingt ans.

别哭，阿尔弗雷德，我在20岁上死去，要用尽我所有的勇气。



伽罗华与人决斗前夜所书写手稿的最后一页。倒数第二句可见"déchiffrer tout ce gâchis (破解这一堆乱麻)"的字样

1832， 法兰西， 天才纷纷陨落

Jean François Champollion (1790.12.23-1832.03.04)， 罗塞塔石碑破译者

Évariste Galois (1811.10.25-1832.05.31) 群论奠基人

Sadi Carnot (1796.06.01-1832.08.24) 热力学奠基人

长不出天才的土地是尴尬的

容不得天才的人群是猥琐的

-Cao Zexian 2021.12.11

代数方程

系数到根 $(a_1, a_2 \ldots\ldots a_n) \mapsto (x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$

系数经对称多项式到根 $(a_1, a_2 \ldots\ldots a_n) \mapsto (s_1, s_2 \ldots . s_n) \mapsto (x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$

研究对称多项式到根 $(s_1, s_2 \ldots . s_n) \mapsto (x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$

根是等价的，在对称多项式里置换

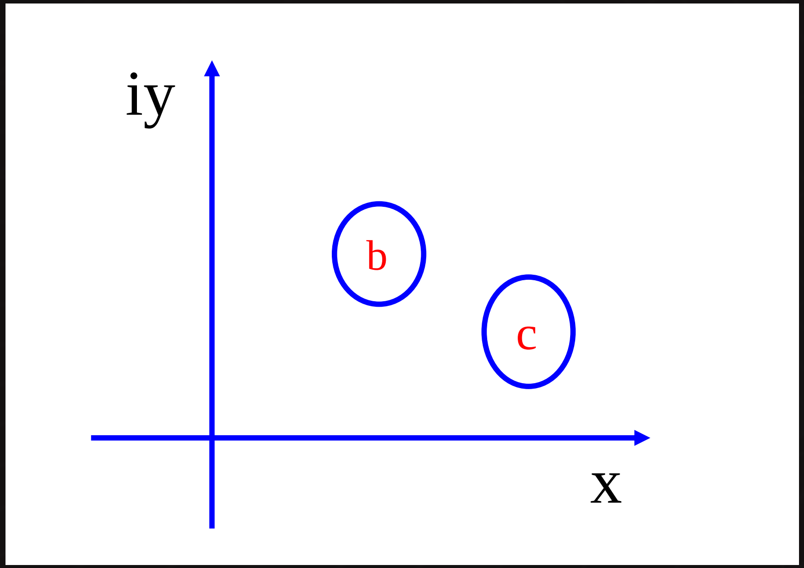
群概念里必须强调的封闭性，恰是这里的根之基本对称多项式的封闭性。

1. 一般n-次多项式的伽罗华群是置换群 S_n;
2. 置换群S_n的最大正规子群一定是交替群A_n;
3. 如果伽罗华群的合成列(composition series) 中的指数始终是素数，则称伽罗华群是可解的，相应的代数方程是可解的;
4. 对于对n=4，A_4 群(12)不是简单的，它的最大正规子群是克莱因的V群 (4)，其指数为3，而3是素数。四次方程可解。对$n \geq 5$，A_n群总是简单的(故它也是它关于群{e}的商群)，且是非阿贝尔群，故五次以上方程一般不可解。

一元五次方程

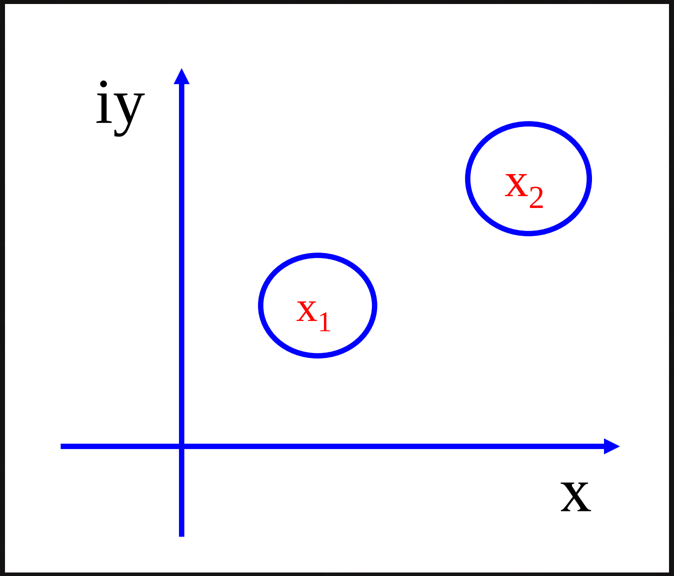
1963，拓扑证明

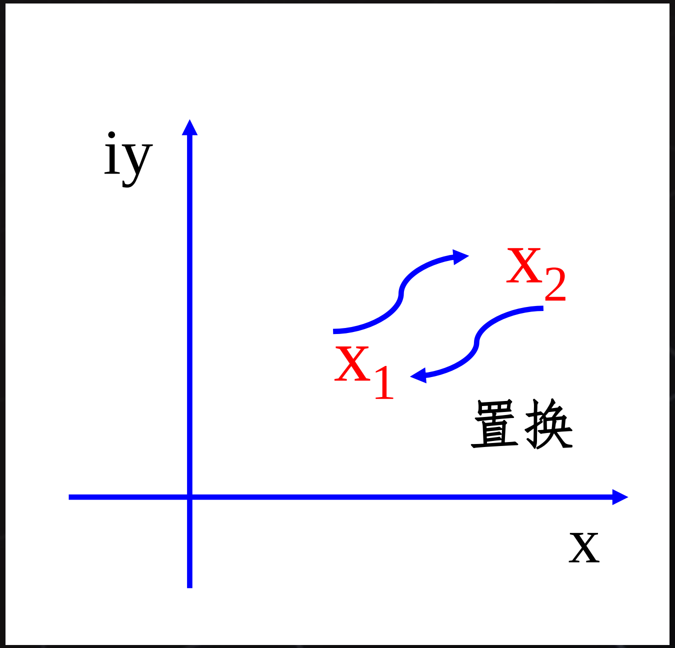
$$x^2 + bx + c = 0$$



$$x^2 \to x$$

$\sqrt{x}$不是函数!





Арнóльд (1937–2010)

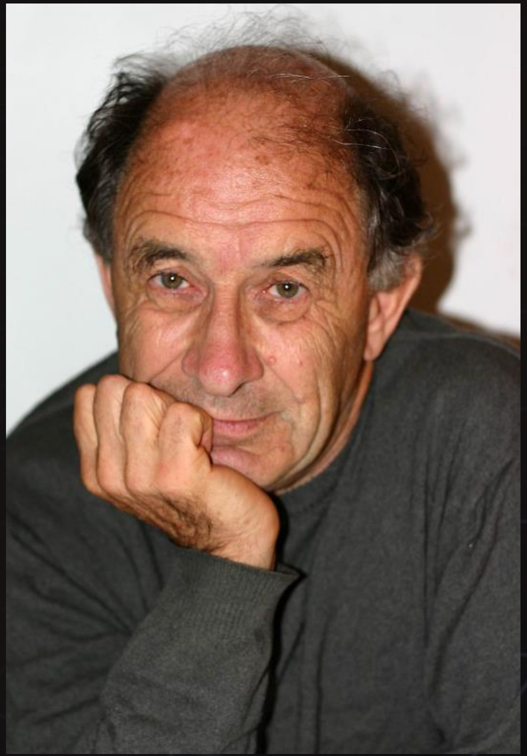
$x^2+bx+c=0$ 之根 x_1, x_2 的两个点。在系数复平面内移动系数 b 和 c，会观察到根复平面内对应的根的移动。以方程 $x^2-x+0.5=0$ 为例，$b=-1$，$c=0.5$；$x_1\approx-1.28$，$x_2\approx0.78$。在系数平面内让参数 c 绕个小圈子回到原处 $c=0.5$，可观察到在根复平面内两个根也各自绕一个小圈子回到原位。这个很好理解。现在，让 c 绕个大点儿的圈子回到原处，会发现对应的两个解的运动结果是它们换位了。发生根的置换了！ This is really, really weird. 也就是说，根的置换这种操作，可以由方程系数连续地走过一个回路来实现（笔者好奇的是，阿诺德是怎么发现这一点的。后来，我想明白了，“无他，唯脑熟且手熟尔！”）。

一元五次方程

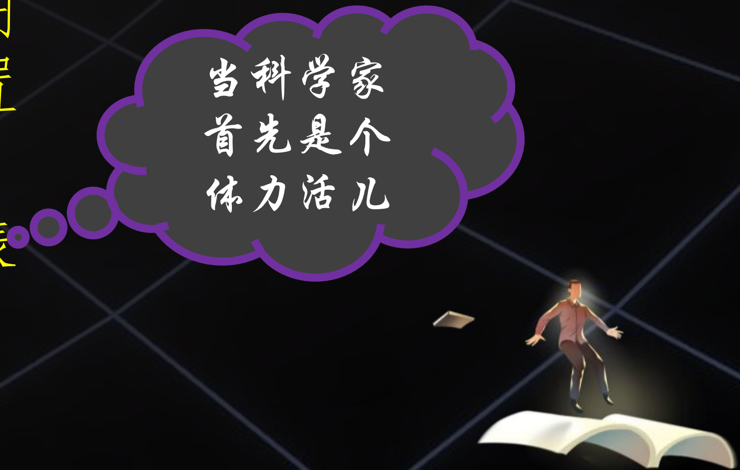
从方程参数到根的映射，即根的表达式，不能是一个连续函数。

函数空间F_n中关于p点的任意两个环路γ_1,γ_2，环路对易式$[\gamma_1,\gamma_2]=\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}$对应的环路，经连续函数再开根号这样的函数$f(p)^\alpha$所得到的像，只是根空间中的一个环路(而非造成根的置换). 如果造成了根的置换，那个系数到根的函数必是根式的嵌套。

阿诺德考察S_5群的120个置换操作得到的120 × 120个对易关系，发现结果中有60个置换操作是对易式的结果。此时说明五次方程的解公式必然要求根式的嵌套。继续研究这60个置换构成的对易关系，发现结果还是妥妥的这60个置换操作，即对易关系进入了一个循环。也就是说，如果五次方程能表示为根式形式的话，这个根式必是无限嵌套的！



Арнóльд (1937–2010)

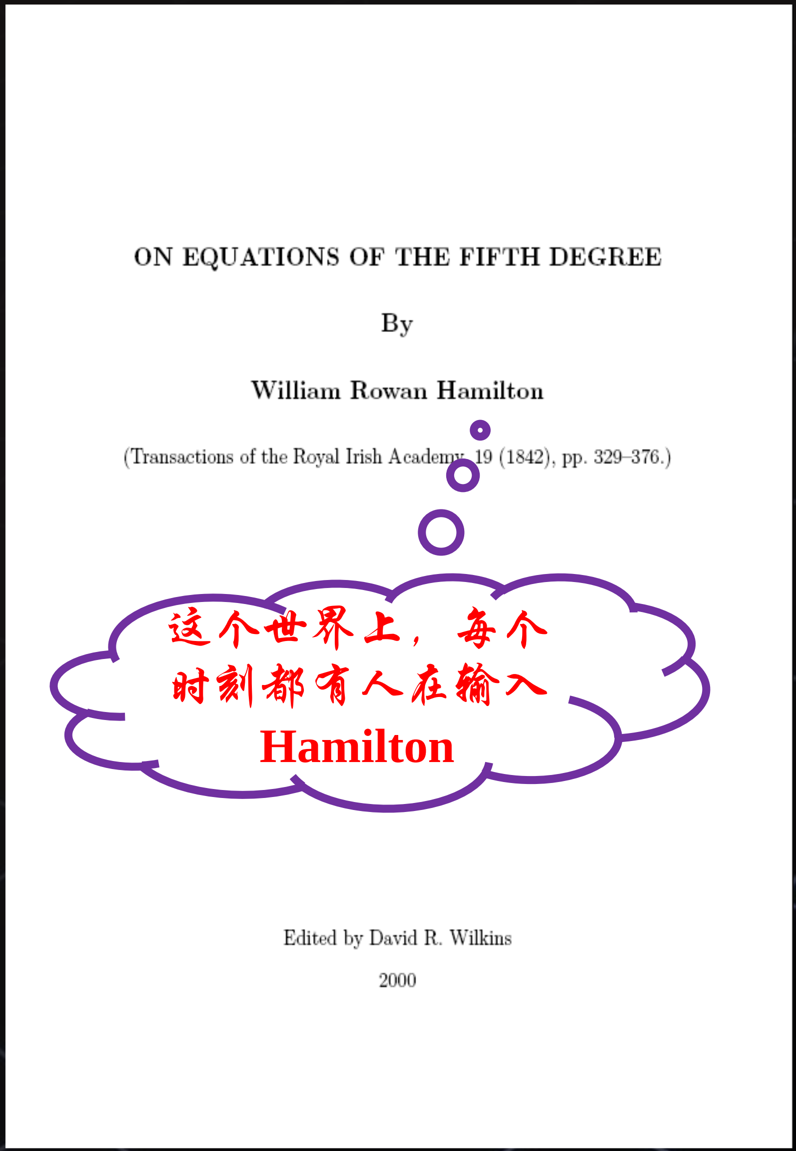


代数方程解

1835年，英国人杰拉尔(George Birch Jerrard, 1804-1863)提交论文宣称找到五次方程的一般解表示。

哈密顿受命审阅这篇文章。花了一个晚上给出报告，认为这篇论文包含很多聪明的数学，但是没有提供一般解。下月杰拉尔干脆宣称找到了任意次方程的解，还是交由哈密顿审阅。

在1836年5月31日这一天，哈密顿给杰拉尔写了一封124页的长信，详细阐明了为什么他给出负面的评审结论。


ON EQUATIONS OF THE FIFTH DEGREE

By

William Rowan Hamilton

(Transactions of the Royal Irish Academy, 19 (1842), pp. 329–376.)

Edited by David R. Wilkins

2000

做明知不可能的事情，会有大收获。

一元五次方程解

一般方程无代数解，但具体的方程有。无代数解，可以有其他形式的解。
一个代数方程，若其伽罗华群是可(分)解的，它就是可解的。 Solvable, Resolvable!

$$x^5 - 20x^4 - 10x^2 - 1 = 0$$

$$x_1 = 4 + \left(\frac{\sqrt{129}+1}{8}\right)\sqrt[5]{16\sqrt{129} - 16} + \frac{1}{2}\sqrt[5]{\left(16\sqrt{129} - 16\right)^2}$$

$$+ \left(\frac{\sqrt{129}+1}{64}\right)\sqrt[5]{\left(16\sqrt{129} - 16\right)^3} + \frac{1}{16}\sqrt[5]{\left(16\sqrt{129} - 16\right)^4}$$

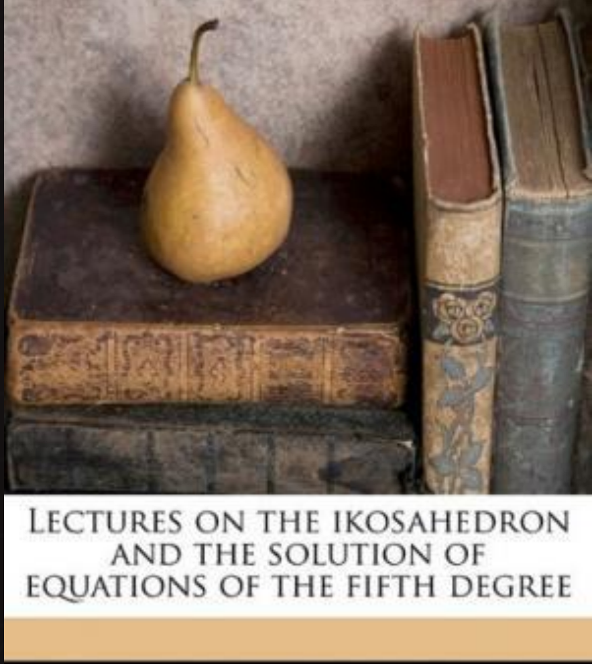
对于方程$x^5 = 2625x + 61500$

$$x_{j+1} = \varepsilon^j \sqrt[5]{75(5+4\sqrt{10})} + \varepsilon^{2j}\sqrt[5]{225(35-11\sqrt{10})} +$$

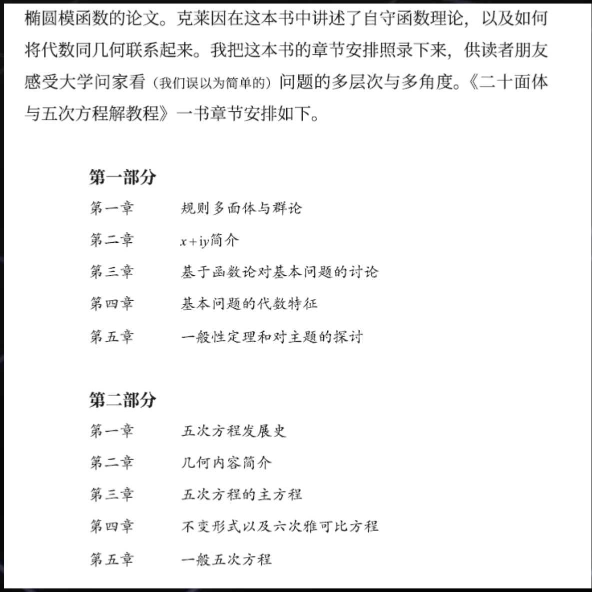
$$\varepsilon^{3j}\sqrt[5]{225(35+11\sqrt{10})} + \varepsilon^{4j}\sqrt[5]{75(5-4\sqrt{10})}。$$

当科学家
首先是个
体力活儿

$$\varepsilon = e^{i2\pi/5}$$



Felix Klein, 1849-1925



椭圆模函数的论文。克莱因在这本书中讲述了自守函数理论，以及如何将代数同几何联系起来。我把这本书的章节安排照录下来，供读者朋友感受大学问家看（我们误以为简单的）问题的多层次与多角度。《二十面体与五次方程解教程》一书章节安排如下。

第一部分

第二部分

一元五次以上方程

Euler 研究无穷多次方程

$$f(x)=\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{x_n}\right)\cdots$$

一次项的系数 $a_1=-(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\ldots)$。

研究方程 $\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1-\frac{1}{3!}x+\frac{1}{5!}x^2-\frac{1}{7!}x^3+\ldots$ $\quad x=(n\pi)^2$

Leonhard Euler, 1707-1783

致一位德国公主的信

$$-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\ldots\right)=-\frac{1}{3!}$$

Basel 问题解决了 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$

真正的大神，敢于直面吓死人的问题，敢于使用不合理的前提，有能力自己发明解决问题的方法、工具。 **~Pseudo-鲁迅**

复数与超复数

意大利工程师Rafael Bombelli率先克服了接受$\sqrt{-1}$的心理障碍

$$a+b\sqrt{-1},\ a-b\sqrt{-1}$$

接受了$\sqrt{-1}$，回头再看方程 $x^2+bx+c=0$

根为$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$。

当$b^2-4c<0$时，两个根$\alpha+\beta\sqrt{-1}$，$\alpha-\beta\sqrt{-1}$是互为共轭的 (conjugate) 。

(牛)共轭，相加、相乘会将这个引入的对象给甩掉

来自$\sqrt{1}=\pm1$ 是两个应同时出现的结果的事实

广义地，类似$\alpha+\beta\sqrt{2}$，$\alpha-\beta\sqrt{2}$的一对数也是共轭的，它们的和与积甩掉了$\sqrt{2}$。

复数与超复数

$$a+b\sqrt{-1}，\ a-b\sqrt{-1}$$

1637年，笛卡尔在《几何学》中引入了虚数 (imaginary number)的说法。

1777年，欧拉引进了符号i表示单位虚数。一般教科书中会写成 $\sqrt{-1}=i$。

René **Descartes** (1596–1650)

严格说来，有问题

$$\sqrt{-1}=i \qquad \sqrt{-1}=\pm i$$

理解为同时、等价：$\sqrt{1}=(1,-1)$，$\sqrt{-1}=(i,-i)$，$\sqrt[4]{1}=(1,-1,\ \ i,-i)$

复数与超复数

复数概念是1813年高斯引入的。 $z = x + iy,\ \ i^2 = -1$

高斯认为复数有等级，**还有比复数更是复数的数**，

他称之为vera umbrae umbra (十足的阴影之阴影).

Carl Gauss, 1777-1855

对于 $z_1 = a + ib, z_2 = c + id$, 有:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d),$$

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)。$$

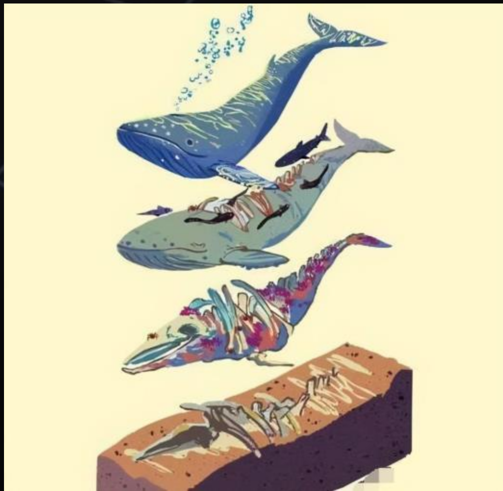
$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

无法比较

大小

$$z_1 = a + ib$$
$$z_2 = c + id$$

1863年，Karl Weierstrass (1815-1897)证明复数是实数唯一的**交换**代数扩展。



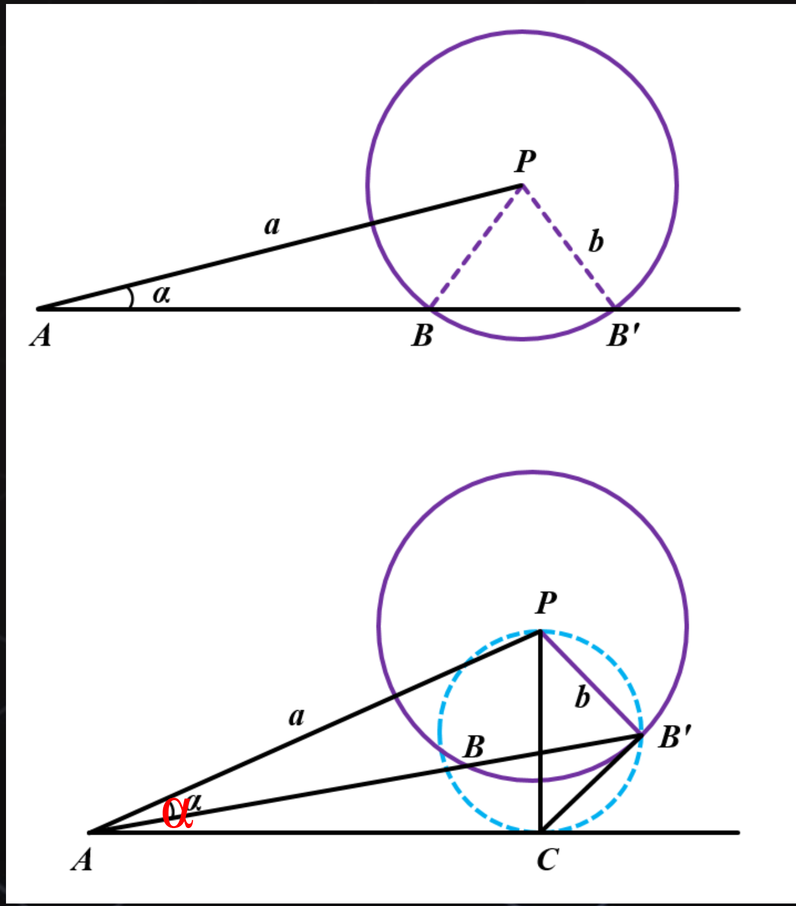
复数与超复数

情景：用两个长度a, b和一个角度 α 决定一个三角形。

1). 当$b > a\sin\alpha$时， 候选的点在基线上的两点(垂点的左右)

2). 当$b^2 - (a\sin\alpha)^2 < 0$，开平方出现虚数的情形，其几何意义是所求三角形在竖直方向上移动了。

$\sqrt{-1}$这种存在可能和上下运动有关？



复数与超复数

Sadi Carnot 他爸老卡诺 (Lazare Carnot, 1753-1823)在1803年出版的Geometrie de Position (位置的几何)一书中的一个几何问题：将一线段分成两截，其积为原线段之平方的一半。写成代数方程，$x(a-x)=a^2/2$，其形式解为$x_{1,2}=\frac{a}{2}+(\pm\frac{a}{2}i)$。

老卡诺: 这说明题中要求的将线段分成两截的点不在线段上。

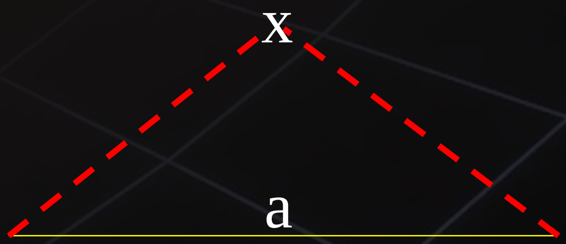
Sadi Carnot, 1796-1832

法国人比埃(Adrien-Quentin Buée, 1748-1826)认为这个方程根意味着分割点x是在线段的上方或者下方~那个 i 指向垂直方向。

庞加莱也来自这个家族

La mère jeune: 你在我左边， 右边？

La fille : emmm, 旁边！



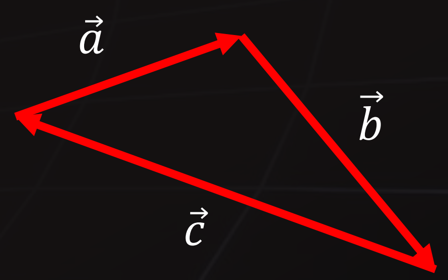
这是一维向二维的扩展！

复数与超复数

复数几何表示在1787年出现在韦塞尔(Caspar Wessel, 1745-1818)的工作中，1799年才发表。这篇文章后来被法国人于埃勒于1895年重新发现，由李(Sophus Lie，1842-1899)重新发表。

韦塞尔首先指出**复数可诠释为复平面内的一个点**。韦塞尔是一位测绘员，因此对线段的方向有深刻的体会，1797年他用丹麦文写了“方向解析表示的尝试”一文。

有方向线段的加法比较简单，加号的意思是把后面线段的起点挪到前面线段的终点。



$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$$

一个有方向的线段由其长度和方向角来决定(极坐标嘛。极坐标来自自然，比笛卡尔坐标系早多了)。**韦塞尔的贡献在于意识到怎样把线段相乘**：有方向的线段的乘法是长度相乘而其方向角相加。这样，**因为bi表示的有方向的线段，自乘以后为$-b^2$，落在反方向上，那么bi表示的有方向线段就应该和x-轴方向成90° 的夹角，那就是y-轴**。

用笛卡尔坐标系的y轴表示虚数，则复数$z=x+iy$ 就是复平面上的一个点。

任意非平行的两条直线可构成平面的坐标系，只有互相垂直的两条直线才构成复平面的坐标系。这是**复平面不是一般意义上的平面**的一个特征。

独立于坐标系的代数表示

复数与超复数

复数的表示

A). $z = x + iy$

B). z= r$\angle\theta$　　极坐标

就是
电磁学

C). $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$

D). $z = re^{i\theta}$ ；　θ：phase, 相因子

欧拉恒等式(1748)：　$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$

$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$

第一次
工业革命

能看出复数是平面上的存在不?

E). 矩阵表示　z= $a + ib \Rightarrow z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

推广规范场
论用得到！

F). 四元数表示。对于四元数　$\varepsilon\varepsilon = -1$，

$z = x + \varepsilon y$，就是复数。

G). 克利福德代数表示：$z = x + Iy = x + \sigma_1\sigma_2 y$，
其中$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1$是克利福德代数的生成元，
微分为$\nabla = \sigma_1\partial_x + \sigma_2\partial_y$。

这是“复杂回归简单，简单内置复杂”的案例.

高观点下看才知道简单事物的不简单之处。

复数与超复数

复数的众多用途

栗1. 数论。任意两整数平方和的乘积必是两整数平方和

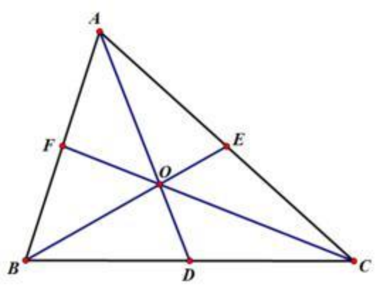
$$(a+bi)\times(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$$

$$(a^2+b^2)\times(c^2+d^2)\equiv(ac-bd)^2+(bc+ad)^2$$

$$(2+5\mathrm{i})\times(4+3\mathrm{i})=-7+26i$$

$$(2^2+5^2)\times(4^2+3^2)=7^2+26^2=725$$

栗2. 几何。由复数z_A，z_B和z_C构成的三角形，则三边中心为$(z_A+z_B)/2$，$(z_B+z_C)/2$和 $(z_C+z_A)/2$；重心显然为$(z_A+z_B+z_c)/3$。



天下一定有几何代数, geometric algebra, 这门学问

复数与超复数

复数的众多用途

电磁学：　羞答答的。当作辅助，求积分

量子力学：　赤果果的。波函数是复函数；旋量

相对论：　复数？是四元数，双四元数

复函数，复变函数

复分析，复几何

黎曼几何

傅里叶分析

拉普拉斯变换…

量子力学里关于自旋1/2粒子描述所用到的数学都产生于电子被发现之前的19世纪中后期。

有些关于量子力学表达的虚张声势是不知数学造成的。

复数与超复数

$$z_0 = e^{i\theta}, \qquad z_0 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$z_0 z = e^{i\theta} r e^{i\varphi} = r e^{i(\theta+\varphi)}$$
$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta} r_2 e^{i\varphi} = r_1 r_2 e^{i(\theta+\varphi)}$$

复数描述2D 空间真有效。
可我们生活在3D空间啊？

$$3 \pm 1 = (2, 4)$$

啥意思？
扩展！

$$3 \pm i = ?$$

Hamilton: 啥复数不复数的，那就是个代数偶 (a, b),
二元数 (algebraic couple, binarion).
你把**加法&乘法**弄对了，写成啥样子都行。

Hamilton: 有没有描述三维转动的 algebraic Triplet?

William Rowan Hamilton, 1805-1865

13岁学完从爱尔兰到印度的所有语言，21岁大学未毕业被聘为教授。这才算学霸。

复数与超复数

从2 D推广到3D　　$z = a + bi \Longrightarrow z = a + bi+cj$

$$i^2 = -1; \quad j^2 = -1$$

四项

$$(a+bi+cj)(a+bi+cj) = (a^2-b^2-c^2) + (2ab)i + (2ac)j + bc(ij+ji)$$

令$ij = ji = 0$或者$ji = -ij$，能让多出来的项消失

两个任意三元数的乘积，两个任意三元数模平方的乘积，结果都是四项

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = (ax-by-cz)^2+(ay+bx)^2+(az+cx)^2+(bz-cy)^2$$

从1830年着手这个问题，Hamilton是拿起了放下，放下了又拿起，一直持续到1843年6月。

复数与超复数

1843年6，19岁的德国青年Gotthold Eisenstein (1823-1852) 拜访了Hamilton, 双方进行了亲切友好的谈话，吓了Hamilton一大跳。
“再不抓点儿紧，估计新代数会被这个德国青年人先发明。”

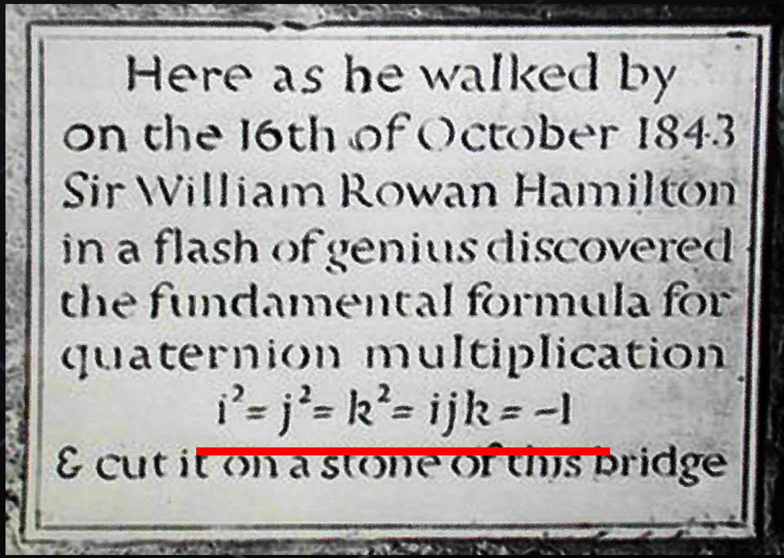
1843年10月16日下午，Hamilton从此桥过，刻下了四元数公式

1843.10.16，四元数Quaternion 横空出世

$$\boldsymbol{q = a + bi + cj + dk}$$

$ij = k$，$jk = i$，$ki = j$；$ij = -ji$，$jk = -kj$，$ki = -ik$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$



复数与超复数

四元数的威力　　**栗1. 矢量分析**

太长
太麻烦

四元数可以加减乘除，加法和乘法规则：

$$(a+bi+cj+dk)+(w+xi+yj+zk)=(a+w)+(b+x)i+(c+y)j+(d+z)k$$

$$(a+bi+cj+dk)(w+xi+yj+zk)=(aw-bx-cy-dz)+(ax+bw)i+(ay+cw)j+(az+wd)k+(\mathrm{cz}-\mathrm{dy})\mathrm{i}+(\mathrm{dx}-\mathrm{bz})\mathrm{j}+(\mathrm{by}-\mathrm{cx})k$$

危机，危机，有危机才肯拓展，才乐意接受新事物。

记$q=a+bi+cj+dk$ 为 $q=r+v$

实部r 哈密顿称之为scalar (标量，尺度因子)；

虚部$v=bi+cj+dk$ 称之为vector (矢量，携带者)

$$(r_1,v_1)+(r_2,v_2)=(r_1+r_2,v_1+v_2)$$

$$(r_1,v_1)(r_2,v_2)=(r_1r_2-\underbrace{v_1\cdot v_2}_{\text{矢量点乘}},\quad r_1v_2+r_2v_1+\underbrace{v_1\times v_2}_{\text{矢量叉乘}})$$

$(0,v_1)(0,v_2)=(-v_1\cdot v_2,\ v_1\times v_2)$。

矢量可以有但不必有方向、大小

矢量点乘叉乘不过是四元数乘积的自然结果。用四元数表示矢量运算结果，**就是普通的乘法，无需背诵什么公式。**

复数与超复数

1846年，哈密顿甚至引入了微分矢量算符

$$\nabla = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz},$$

进一步地有$-\nabla^2 = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d}{dz}\right)^2$，这些会迅速用到电-动力学上去。

某年秋，武汉大学一大二学生：
曹老师，我读了Jackson的经典电动力学，我觉得它有问题，但我不知道是什么问题，你告诉我到底是什么问题。

曹：电动力学的要点是知道电流是线，用线之代数(linear algebra)处理它。电动力学的(数学)奠基人是Grassmann, Riemann, Tait, Heaviside.

四元数经Gibbs 改造成矢量分析，用来表示电动力学，一大奇观是电动力学书后面要附两页点乘叉乘叉叉乘叉点乘的乱麻似的公式

$$(5)\quad \nabla\times(\bar{f}\times\bar{g}) = (\bar{g}\cdot\nabla)\bar{f} + (\nabla\cdot\bar{g})\bar{f} - (\bar{f}\cdot\nabla)\bar{g} - (\nabla\cdot\bar{f})\bar{g}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times(\bar{f}\times\bar{g}) &= (\nabla_{\bar{f}} + \nabla_{\bar{g}})\times(\bar{f}\times\bar{g}) \\ &= \nabla_{\bar{f}}\times(\bar{f}\times\bar{g}) + \nabla_{\bar{g}}\times(\bar{f}\times\bar{g})\end{aligned}$$

根据常矢运算法则：

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times(\bar{f}\times\bar{g}) &= -\nabla_{\bar{f}}\times(\bar{g}\times\bar{f}) + \nabla_{\bar{g}}\times(\bar{f}\times\bar{g}) \\ &= -(\nabla_{\bar{f}}\cdot\bar{f})\bar{g} + (\bar{g}\cdot\nabla_{\bar{f}})\bar{f} + (\nabla_{\bar{g}}\cdot\bar{g})\bar{f} - (\bar{f}\cdot\nabla_{\bar{g}})\bar{g} \\ &= -(\nabla\cdot\bar{f})\bar{g} + (\bar{g}\cdot\nabla)\bar{f} + (\nabla\cdot\bar{g})\bar{f} - (f\cdot\bar{\nabla})\bar{g}\end{aligned}$$

复数与超复数

四元数的表示

Pauli矩阵
差个i

A). $q = a + bi + cj + dk$

B). 2×2复矩阵表示 $\begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix}$

四个基矢量为 $1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\sigma_1=\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix}$, $\sigma_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$, $\sigma_3=\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}$

C). 将四元数的每个虚部对应两个2×2泡利矩阵之积，即令 $i=\sigma_3\sigma_2, j=\sigma_1\sigma_3, k=\sigma_2\sigma_1$，有：

$$q = a + b\sigma_3\sigma_2 + c\sigma_1\sigma_3 + d\sigma_2\sigma_1$$

$$q = a + bi + cj + d\,k$$

这里 i, j, k 构成一个3D的矢量空间，但是它们本身是bivector. 参考Clifford Algebra.
你学i, j, k表示矢量时感到别扭没有？

复数与超复数

四元数的表示

D). 四元数4×4矩阵表示$\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}$,

这是个分量为(a,b,c,d)的四维线性空间矢量，四个基矢量为

看到 Dirac
矩阵没有？

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad i=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad j=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad k=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

我(们)学理论物理的困难，在于学前不知道其所需要的数学，学后也不知道。你没学过这些数学，你觉得好神奇；你学过这些数学，会觉得好自然啊。

复数与超复数

四元数的威力

栗一. 1748年欧拉发现了四平方数恒等式：任意四个整数平方和同另一组四个整数平方和之积还是四个整数的平方和。如果没有四元数，这个恒等式的证明如果不是不可能的，也是非常繁琐的。**有了四元数，这就是个习题！**

你的累死累活，不过是别人的轻描淡写！

$$(1+2i+3j+4k)(2+3i+4j+5k)=(-36+6i+12j+12k),$$

表明有等式$(1^2+2^2+3^2+4^2)(2^2+3^2+4^2+5^2)=36^2+6^2+12^2+12^2$

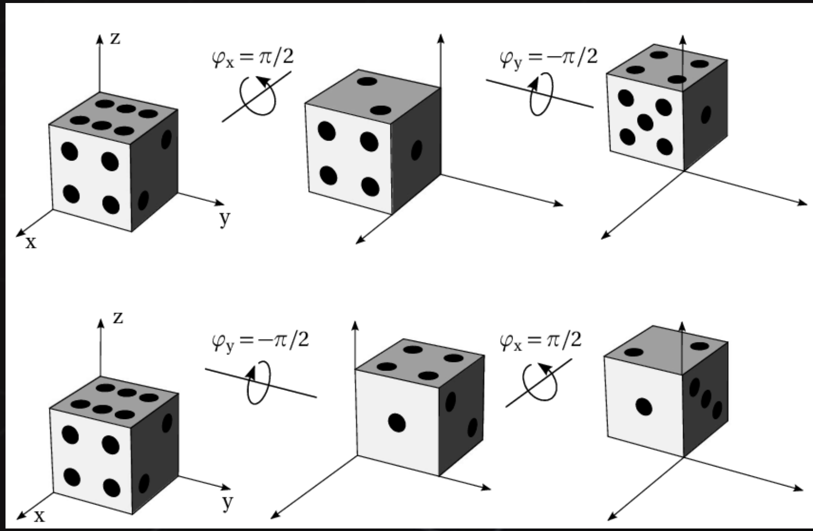
复数与超复数

四元数的威力　　**栗2. 表述转动**

四元数乘法　$q_1q_2 \neq q_2q_1$

角动量乘法　$L_1L_2 \neq L_2L_1$

穿袜子穿鞋 ≠ 穿鞋穿袜子



假设 u 是单位四元数 q 里的单位矢量

$q = \cos\phi + u\sin\phi$

自旋1/2的问题在这儿啦

操作$v' = qvq^{-1}$的结果就是矢量v 绕矢量u 转过了2ϕ角。

对矢量的两次转动，$v' = q_2(q_1vq_1^{-1})q_2^{-1} = qvq^{-1}$

对应 $q = q_2q_1$，$q^{-1} = q_1^{-1}q_2^{-1}$

从前的欧拉转动定律的繁杂证明变成了四元数的简单乘积。

问题是由于看问题的层面太低才显得复杂的。

复数与超复数

算符的对象

乘法， Grassmann in Ausdehnungslehre 1844年版就提供了16种乘法

$2 \times 3 = 6 \qquad 2m \times 3m = 6m^2 \qquad rp = r \cdot p + r \wedge p \qquad v' = qvq^{-1}$

Operator & Operand： $\hat{H}\psi = E\psi$

复数作为operator, operand是复数自身

复数 SO(2)

$$\begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

四元数 SU(2)

$$\begin{pmatrix} \xi' & \eta' \\ -\tilde{\eta}' & \tilde{\xi}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi & \eta \\ -\tilde{\eta} & \tilde{\xi} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

旋量

Spinor

年轻60岁

复数与超复数

八元数
Octonion

1843年12月，格莱乌斯就发明了八元数。文章交给哈密顿审稿，因为哈密顿是个出了名的完美主义者，这审稿时间拖得太长，结果八元数变成了凯莱数，因为1845年3月Arthur Cayley (1821-1895)在率先发表了相关结果。

$$O = x_0e_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7$$

选定$e_0 = 1$，八元数乘法有480种可能, 常见的一种选择是,

$$e_0e_0 = e_0, \quad e_0e_i = e_ie_0 = e_i, \quad e_ie_j = -\delta_{ij}e_0 + \varepsilon_{ijk}e_k,$$

$$O_1O_2 \neq O_2O_1 \qquad O_1(O_2O_3) \neq (O_1O_2)O_3$$

可定义为一对四元数(a, b)，其乘法为$(a, \ b)(c, \ d) = (ac - d^* b, \ da + bc^*)$，其中$d^*$，$c^*$为四元数共轭。

任意两组八个整数平方之和的积一定是八个整数平方之和

1923年，Hurwitz 定理：可除代数只有1-, 2-, 4-, 8-元四种情形。

复数与超复数

代数规则

乘法交换律 $A * B = B * A$

乘法结合律 $A * (B * C) = (A * B) * C$

	交换律	结合律
一元数/实数	Yes	Yes
二元数/复数	Yes	Yes
四元数	No	Yes
八元数	No	No

无中才见有的价值，才能懂得那有的性质

当人们构造不出16元数，发现这些规则被破坏殆尽的时候，才认识到它们的存在及存在的价值。

复数与超复数

- 复数表述在经典力学、电磁学中被当作辅助工具；
- 电动力学的表述恰逢四元数的诞生；四元数、线的代数、Clifford 代数为电动力学而生 (磁场B在数学上是什么东东?)；
- 相对论的 (ict; x, y, z) 是双四元数 (biquaternion)
- 八元数的物理研究在尝试中

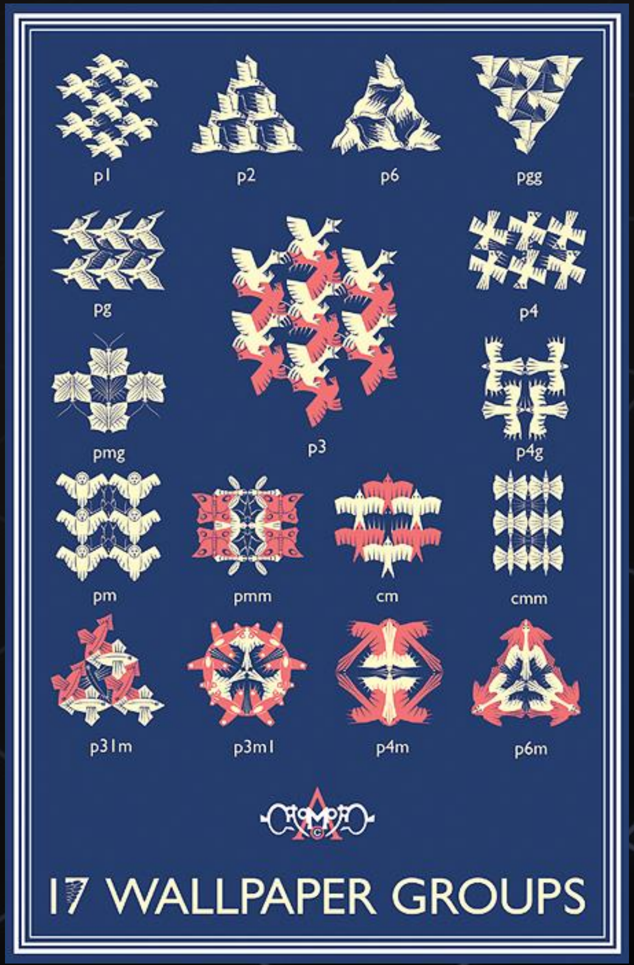
当20世纪诞生了量子力学，复数一时间风光无限

经典力学、经典光学、波动力学、波动光学、电动力学、相对论、代数、代数方程、复数、超复数、变分原理……这一串蚂蚱用 ‘**Hamilton**’ 就能**串**起来

物以类聚，人以群分

Threads in the Tapestry of Physics

—Sheldon Lee Glashow



Ah，Gruppiere (群)! Ça veut dire Ensemble (集合、系综).

~ 法国电影 On a retrouvé la 7ème compagnie 台词

Gruppieren von Formen, Bildern oder anderen Objekten.

群论，加上微积分、变分法、微分方程，是我心目中物理学必备的四大数学工具

无去来处，动静等观 → 相对论

-北京西山大觉寺匾额

枉曲直凑 →微分几何

-葛洪《抱朴子》

物以类聚，人一群分 →群论

- 《战国策》

祖宗啊，啥道理你都懂得那么深刻，你咋不把它发展成体系呢？

参阅曹则贤：《相对论-少年版》，《云端脚下》

群论

肥水不流
外人田

群G是这样的集合 (ensemble)，配备了一种二元运算(乘法)，使得任意两个元素的乘积都是该集合的元素。即乘法是一个$G \times G \to G$的映射。

1) 满足结合律，　$(pq)r = p(qr)$；

2) 存在单位元 e，　$ge = eg = g$；

3) 对于任意元素g存在唯一的逆g^{-1}，　$gg^{-1} = g^{-1}g = e$。

$Z=\{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$　乘法为整数的加法

$C_4=\{1, -1, i, -i\}$　乘法为复数的乘法

$Q_8=\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$　乘法为四元数的乘法

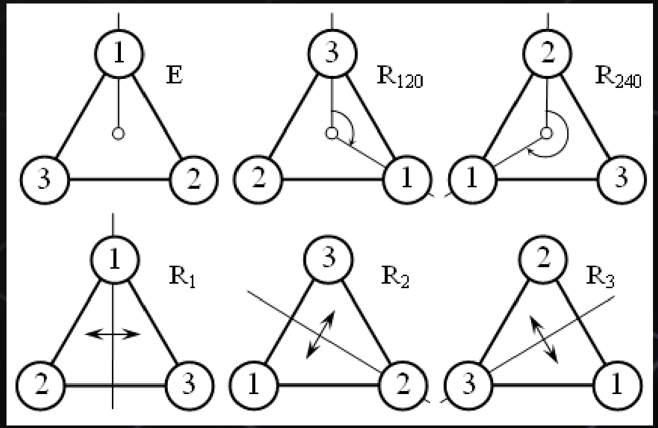
群论

置换群 (Permutation group)

置换 P1 $\begin{pmatrix}1,2,3,4,5,6\\4,2,5,3,1,6\end{pmatrix}\downarrow$ $(1435)=\begin{pmatrix}1,2,3,4,5,6\\4,2,5,3,1,6\end{pmatrix}$

置换 P2 $\begin{pmatrix}1,2,3,4,5,6\\3,1,4,2,5,6\end{pmatrix}$ $(1342)=\begin{pmatrix}1,2,3,4,5,6\\3,1,4,2,5,6\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1,2,3\\1,2,3\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1,2,3\\2,1,3\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1,2,3\\1,3,2\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1,2,3\\3,2,1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1,2,3\\2,3,1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1,2,3\\3,1,2\end{pmatrix}$$



一个有n个元素的集合，有n!个置换操作，构成置换群。
一个n-次代数方程的根的置换，就构成置换群S_n

任何一个有限阶群，都同构于一个置换群的子群。

群论

群元素 貌似等价，但其实群里面存在更深层的结构。

正规子群: 设群H是群G的子群，若对于任意的$g \in G$总有$gH = Hg$，则称群H是群G的正规子群。**俗名小圈子**

群G是置换群，则群G的所有子群都是正规子群。交错群A_n 是置换群S_n 的正规子群。

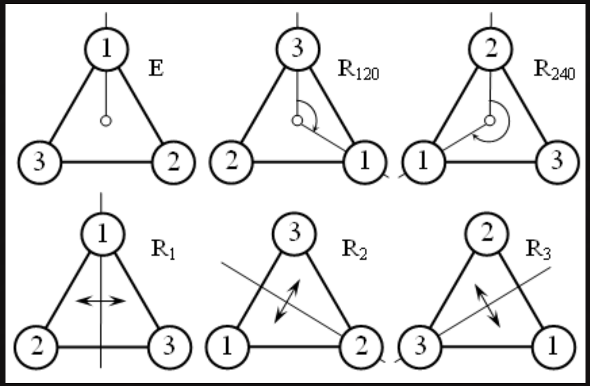
$C_4=\{1, -1, i, -i\}$

$Z_2=\{1, -1\}$

拉格朗日考虑**子群陪集**概念。设H是群G的一个子群，定义陪集集合如下：$G/H = \{aH|a \in G\}$，此为左陪集；或者$G/H = \{Ha|a \in G\}$，此为右陪集。陪集的每一个元素本身都是集合，群H也是其中之一，其是由单位元素{e}所生成的陪集$\{eH\}$。对于正规子群，左陪集与右陪集是相同的。

如果G是李群，而H是群G的正规子李群，则商群G/H也是李群。这样李群G就有纤维丛的结构，群G/H是基空间，群H是纤维。

商群：设H 是群G的正规子群，H的所有陪集G/H 关于运算$aH \cdot bH = (ab)H$构成群，称为群G关于子群H的商群。商群从前被看作成辅助解式方程的伽罗华群。



群论

曹老师曰：观音能具千般异相，群亦当如是观！

S_3群/D_3群有6个元素，$\{e,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,C^1,C^2\}$, 分为三个共轭类

$$\begin{pmatrix}1,2,3\\1,2,3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1,2,3\\2,1,3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1,2,3\\1,3,2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1,2,3\\3,2,1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1,2,3\\2,3,1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1,2,3\\3,1,2\end{pmatrix}$$

群表示论

六个元素的二维不可约表示矩阵

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

群论

群论的起源

1) 经典代数 (J. L. Lagrange，1770);
2) 数论 (C. F. Gauss，1801);
3) 几何 (F. Klein，1874); Erlangen program 1872
4) 分析 (S. Lie,1874; H. Poincaré & F. Klein，1876)

方程$x^n=1$的根 $x_m=e^{i2\pi m/n}$，$m=0$，1, …$n-1$，按照复数相乘构成n-阶循环群。如果n是个费马素数，高斯证明解这个分圆方程可以约化为为解一系列二次方程，此为尺规法画17边形理论基础。

二次型等价类$[f(x,y)=x^2+5y^2]$和$[g(x,y)=2x^2+2xy+3y^2]$就构成群。

Felix Klein, 1849-1925

李群 & 李代数

有乘有加的叫 代数

克莱因把几何的分类当成了变换群下的不变性研究。几何是关于图形在变换下不变之性质的研究。群作为不同的学问出现在近代数学之各处，它作为**分门别类的原则**贯穿最变化多端之各个领域。

Sophus Lie, 1842-1899

群论

李群 & 李代数

挪威数学家李(Sophus Lie)1874年引入连续变换群的一般理论。

连续变换 $x_i \to f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, .., a_m)$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

其中$a_1, a_2, \ldots, a_m$是参数，可构成**连续变换群**。

$x \to \frac{ax+b}{cx+d}$，其中a, b, c, d为实数，$ad - bc \neq 0$，就构成连续变换群

自守函数，其在变换$z \to \frac{az+b}{cz+d}$，其中a, b, c, d为复数，$ad - bc \neq 0$，所构成的连续变换群或者其子群下是不变。

当a, b, c, d为整数且$ad - bc = 1$时，变换$z \to \frac{az+b}{cz+d}$构成的是同椭圆模型式函数相联系的模式群。

群论

$e^0 = 1$，$e^{i\cdot 0} = 1$，$e^{\alpha(x)\cdot 0} = 1$

选择合适参数t，使变换$A(t)\sim g$满足$A(t_2+t_1) = A(t_2)A(t_1)$，群元素乘法变成参数加法。因为$A(t_2+t_1) = A(t_2)A(t_1)$，必然有$A(0) = I$，故可取 A(t)=exp(Xt)的形式.

因为$A(0) = I$，$\dot{A}(0) = X$，在连续群表示A(t)=exp(Xt)的参数$t = 0$附近，算符X就决定了连续群的全部内容。

无穷小变换X的集合称为李代数^rG 或者无穷小环 (ring)。

二维转动，用转角表示，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

表示变换为$r(t) = exp(t\omega D)r(0)$，取 $D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，得

$exp(t\omega D) = \begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}$。 $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$**描述二维的转动。**

群论

设$A(t) \in G$，$B(t) \in G$，则$C(t) = A(t)B(t) \in G$，故有

若$X \in {}^r G$，$Y \in {}^r G$，必有$X + Y \in {}^r G$。

李代数${}^r G$是一个矢量空间。

元素 $C(t) = A(t)B(t)A^{-1}(t)B^{-1}(t) \in G$ 近似地表为

$$C(t) = I + (XY - YX)t^2 + \ldots,$$

因此$XY - YX$也是该群的无穷小变换，但是参数是t^2。

对易式 $[X, Y] = XY - YX \in {}^r G$ 是李代数中的元素。

若群的李代数基为$E_1, E_2, \ldots E_m$，维度m是群的参数个数，基之间必有关系 $[E_j, E_k] = c_{jk}^{\ell} E_\ell$。

结构因子 c_{jk}^{ℓ} 有关系 $c_{jk}^{\ell} = -c_{kj}^{\ell}$

学物理的，时刻记得量纲分析，知李代数必有结构因子。

规范场论， Yangian

$$G \times G \rightarrow G$$

群论

SU(2) 群是二维复矢量空间的等度规群，作用于C^2空间中的S^3球上。变换的一般形式为

$U = aI + i(b\sigma_1 + c\sigma_2 + d\sigma_3)$，其中$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1.$

$$\left(\sigma_j, \sigma_k\right) = 2i\varepsilon_{jkl}\sigma_l$$

$\sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$; $\sigma_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}$； $\sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$，这就是泡利矩阵。

Gell-Mann, 1929-2019

SU(3) 群是三维复矢量空间的等度规群，作用在C^3空间中的S^5上。其李代数$su(3)$的生成元为$T_a = \frac{\lambda_a}{2}$，$\lambda_a$就是盖尔曼矩阵，为迹为0的$3\times 3$厄米特矩阵:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}。$$

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if^{abc}\lambda_c,$$
$$f^{abc} = -\frac{i}{4}tr(\lambda_a[\lambda_b, \lambda_c])$$

群论

SU(2) 群，**SU(3)** 群
Special unitary groups

从数学角度来看，一个2×2的酉阵, 形式为

$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$，其中$aa^* + bb^* = 1$。

二(复)分量的量$\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}$ 按照

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \zeta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}$$

的方式变换，即为旋量(spinor)。

另行学习外尔旋量, 狄拉克旋量
请分辨 rotator, versor, spinor

群论

群论的眼光回头看代数方程

根据代数基本定理，当方程系数和根都在在复数域上时，方程$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$有n-个复数根。

方程的n-个**根是等价的、不可区分的**，这样容易用它们构成对称函数。**对称性**是代数方程理论的一个关键词。

群论可以用来理解代数方程的可解性问题。

对称函数，随根的**置换**不变。

$(x_1,x_2\ldots,x_n)^{(0)}=+1$

$x_1+x_2+\ldots+x_n=-a_1$

$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=+a_2$

$x_1x_2x_3+x_1x_3x_4+\ldots+x_1x_{n-1}x_n+x_2x_3x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-a_3$

…….

$x_1x_2\ldots x_n=(-1)^na_n$

交替
alternating

拉格朗日引入新的用根表示的有理函数$R(x_1,x_2\ldots,x_n)$，其随根的**置换**有不同的值$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k$。若$k<n$，则多项式方程$(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_k)=0$可作为辅助的解式方程。此方法对三次、四次方程有效，但是对五次方程无效。有理函数$R(x_1,x_2\ldots,x_n)$构造无章法可循，但启发了代数方程的研究。

群论

代数方程的性质都在方程的伽罗华群里。伽罗华引入正规子群 (自共轭，相似)，把群分成单群和复合群。

一个可解群，其最大正规子群合成列中，子群阶数之商为素数。这要求商群必是一个素数阶群，而素数阶群必为循环群。可解群中的正规子群关于上一级正规子群的所有陪集(商群)必须为一个循环群。**循环群是阿贝尔群，则用一个生成元通过乘方 (逆运算就是开方)就能表示。**

对于一个群，一点一点分解它的最大正规子群序列，$G \rhd H_1 \rhd H_{2\ldots} \rhd H_k \rhd \{e\}$，相应地，有商群系列,$G/H_1, H_1/H_2\ldots, H_{k-1}/H_k$, 若商群总是素数阶的循环群, 则这群是可分解的。

对于一般一元五次方程，其对称群是S5
最大正规子群序列 为S_5 (120) $\rhd$ A_5(60) $\rhd$ $\{e\}$ (1);
120/60=2 是素数， 但 60/1=60 不是素数。
一般五次方程代数不可解. QED.

理解不可能为什么不可能，能带来新的知识体系!

规范场论

经典力学/光学：　最小作用量原理 (Lagrange, Hamilton)

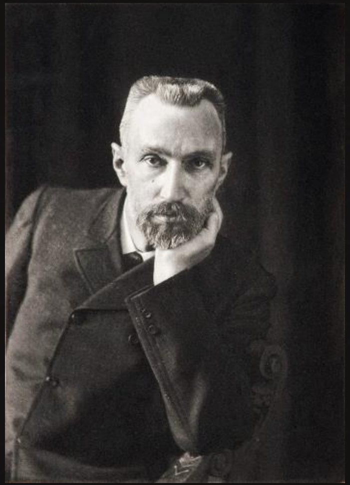
热力学:　Carnot 原理

相对论：　相对性原理 (Euler，Poincaré)

规范场论：　规范原理 (Weyl)

(局域化对称群，伴随规范场，新拉格朗日量对局域群协变)


Noether (1882-1935)


Pierre Curie (1859-1906)

Pierre Curie, 1894: *对称性本身应该是物理的对象！*

Felix Klein, Emmy Noether, Herrmann Weyl, Eugene Wigner:
好的， 好的，马上安排！


Weyl (1885-1955)

规范场论

群论之于固体物理： 固体空间群1890-1891确定；

1918年哥廷恩晶体的对称性研究

群论之于相对论：狭义相对论的核心是洛伦兹变换。

庞加莱要求其构成群才最终确定洛伦兹变换。

群论之于量子力学： 没有群论，量子力学能干什么?

Weyl (1885-1955)

Herrmann Weyl:

Gruppentheorie und Quantenmechanik (**群论与量子力学**)，1928;

The classical groups：their invariants and representations (**经典群**), 1939.

Symmetry (**对称**)，1952. 插图有**成都文殊院**，就问你惊讶不惊讶?

Eugene Wigner:

Gruppentheorie und ihre Anwendungen auf die Quantenmechanik der Atomspektren (**群论及其在原子谱量子力学中的应用**), 1931.

Wigner, 1902-1995

Gruppenpest (群瘟)

一流物理学家对自己无力理解的学问的态度也绝不免俗：贬低！

规范场论

1918年是什么样的年份？

Since 1900　量子力学一直在发展中
1905--　狭义相对论确立
1907-1915　爱因斯坦(ETH)的广义相对论建立
1918年　诺特(哥廷恩)凭借Invariante Variationsprobleme
一文建立起***对称性与守恒律***的关系
物理学进入**Symmetry dictates interaction** 时代!

1918年　从哥廷恩毕业的、在ETH任教的、和爱因斯坦
交好的数学家外尔研究物理：***给广义相对论夯实基础***

跟Hilbert
学的习惯

有成就的条件之一：在重大事件的现场感受气氛。

Hermann Weyl (1885-1955)

Emmy Noether (1882-1935)

规范场论

Invariante Variationsprobleme，*对称性与守恒律*

对称性决定相互作用

物理学的套路

最小作用量原理

$$I = \int L(x, u, u_x, u_{xx} \ldots) d^\mu x$$

$$\delta I = 0$$

拉格朗日量密度L的对称性-物理

时空对称性

$$x'^\mu = M^\mu_\nu x^\nu + x^\mu_0$$

广义动量和角动量守恒

$$\mathrm{P}^\mu = (p^1,\ p^2,\ p^3;\ \mathrm{E/c})$$

$$J = X \wedge P$$

那么，就不兴拉格朗日量密度有点别的抽象空间里的对称性？比如同位旋空间。这就引出了规范理论。关键词：局域~对称群。如果先知道守恒量，可以反过来构造拉格朗日量，这就是叫 **symmetry dictates interaction.** *规范场论酝酿中。*

Emmy Noether (1882-1935)

学外语的文科生。大学毕业后跟父亲说还是想当数学家。6年后成为一流数学家，被称为近世代数之父。

这才是女科学家!!!

时空对称性

抽象空间对称性？

栗子： 圣诞树虫 Christmas tree worm

时空对称性：

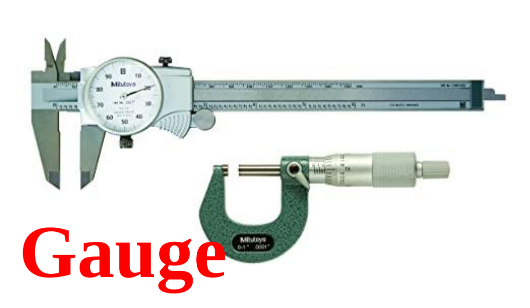
总是一个左旋、一个右旋

抽象空间对称性：

颜色={红、橙、黄、绿、青、蓝、紫}

藏得很深的抽象空间对称性：

总是一男一女。

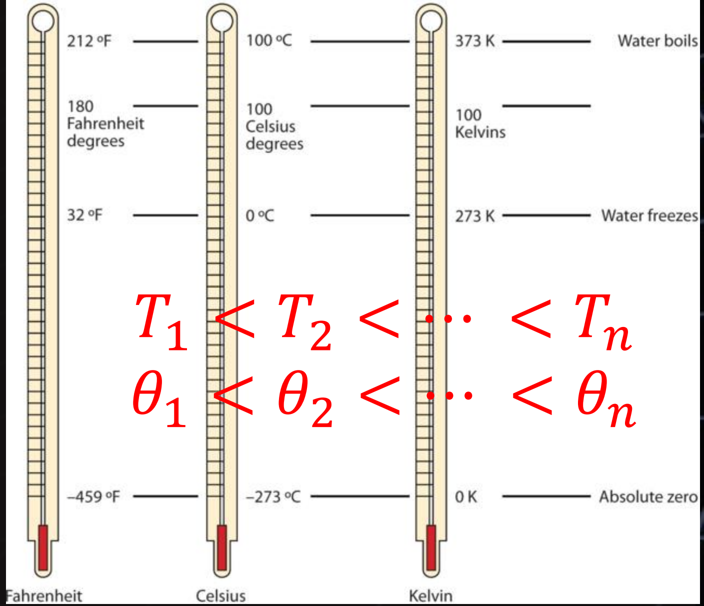


规范理论

Eichtheorie

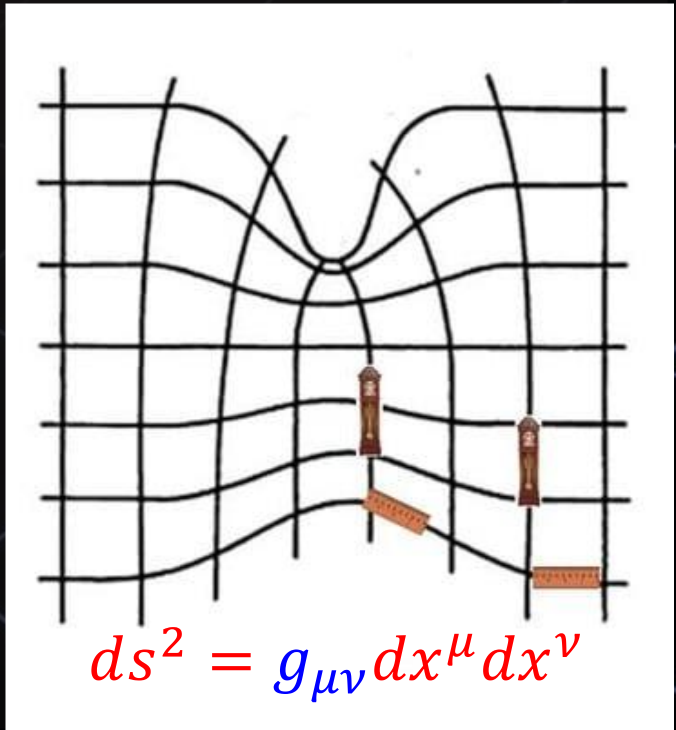
Gauge theory

Maßstab; Gauge; 规、矩、模、范



不知铸钱有范，而人之求之者，**买钱不买范。**

—袁枚《随园诗话》



曹则贤，物理学咬文嚼字058： Norm and Gauge

规范自由度

微积分问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \rightarrow y = F(x) + a$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x) \quad \rightarrow y = F(x) + ax + b$$

任意函数

经典力学
Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \qquad L' \rightarrow L + df(t,q)/dt$$

反向思维： 如果知道比如 上述 f(t, q) 这样的自由度，是否可以猜测方程该是什么样呢？

哲学：特别的自由意味着特别的约束！

规范自由度

正面？ 反面？

正面 反面 正面 反面 正面 反面 反面 正面

有了规范自由度

十里不同俗

今天

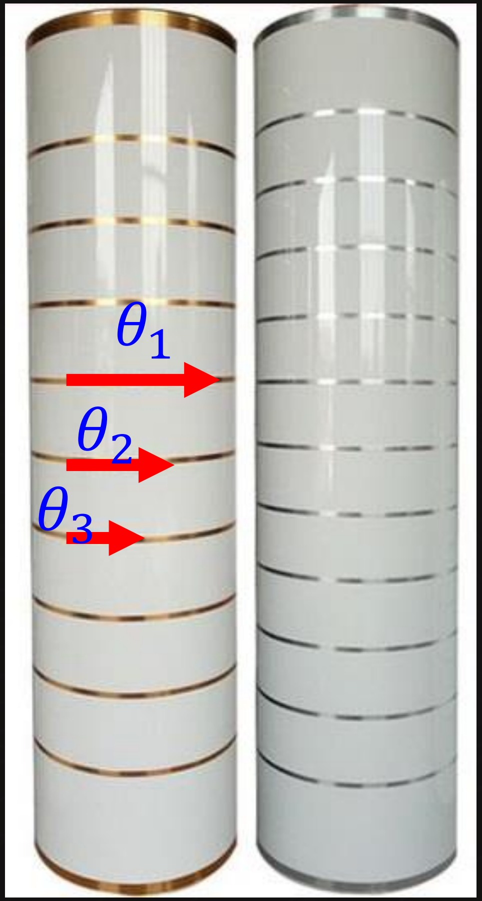
正面 反面 正面 反面 反面 正面 正面 反面

明天

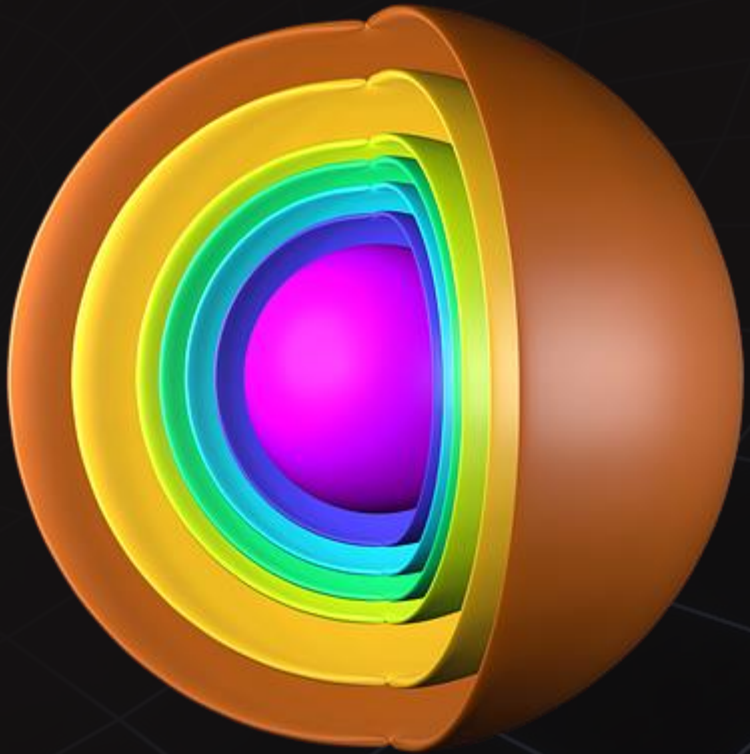
正面 反面 反面 正面 反面 正面 反面 正面

地方粮票
规范自由度

规范自由度~局域对称性



柱子的U(1) 对称性，每一个高度上有独立的转角 θ_h



球的SU(2)对成型，每一个半径的球壳都有独立的转角 (θ_r, ϕ_r)

规范场论

规范(gauge)问题最早出现在电磁学中
麦克斯韦方程组

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0$$
$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}+\partial\boldsymbol{B}/\partial t=0$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0$$
$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}-\mu_0\varepsilon_0\partial\boldsymbol{E}/\partial t=\mu_0\boldsymbol{j}$$

$$\partial\wedge F=0$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=j^\nu$$

采用4-矢量电磁势$A_\mu=(\varphi/c,\quad A)$;

反对称洛伦兹张量形式场强 $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$

前两项: $\partial\wedge F=0$,或者$\partial_\mu(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma})=0$;

外积
内积
庞加莱引理

后两项: $\partial_\mu F^{\mu\nu}=j^\nu$,

表示是有
层次的

后两个(有源)方程:

$$\nabla^2\phi+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot A)=-\rho/\varepsilon_0$$

$$\nabla^2 A-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot A+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=-\mu_0 j$$

规范场论

麦克斯韦方程组+洛伦兹动力学方程不能唯一地决定电磁势，电磁势 ϕ和 A 具有一定的任意性。

作变换 $A \rightarrow A' = A + \nabla\chi \qquad \phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}$，方程不变。

标量函数$\chi(t,x,y,z)$被称为规范函数, 变换称为**规范变换**.

若χ_1，χ_2是规范函数，则$\chi_1 + \chi_2$也是规范函数。电磁相互作用的规范函数构成一个加法群，属于阿贝尔群。**规范变换构成规范群。**

选择$\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$， Lorenz (Ludvig Valentin Lorenz, 1829-1891)规范

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\rho/\varepsilon_0 \qquad \nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 j$$

电磁波

Lorenz 规范是一个Lorentz 变换不变的规范条件。

Lorent
Lorenz
Lorentz
Lorenzoni
……

规范场论

按照最小作用量原理出发构造物理理论

麦克斯韦方程组4-矢量形式： $\Box A^{\nu}-\partial^{\nu}(\partial_{\mu}A^{\mu})=j^{\nu}$，
可由拉格朗日量密度

$$L=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-j_{\mu}A^{\mu},$$

场
相互作用

其中$F^{\mu\nu}=\partial^{\mu}A^{\nu}-\partial^{\nu}A^{\mu}$，出发作为欧拉-拉格朗日方程得到

此外，若引入质量项，

$$L=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2}m^{2}A_{\mu}A^{\mu}-j_{\mu}A^{\mu},$$

得到Proca 方程，

$$\Box A^{\nu}-\partial^{\nu}(\partial_{\mu}A^{\mu})+m^{2}A^{\nu}=j^{\nu},$$

描述有质量、自旋为1的粒子。

工夫都在
构造拉格朗日量

规范场论

爱因斯坦场方程 $$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}=8\pi GT_{\mu\nu}$$

$T_{\mu\nu}$

它不能唯一地决定时空的度规张量 $g_{\mu\nu}$，所以引力也有规范的事儿。

能量守恒可以把能量-动量张量 $T_{\mu\nu}$，$\mu,\nu=0,1,2,3$，的独立分量减少到6个。

爱因斯坦：广义协变性要有所限制。所谓限制，即具有广义协变性的场方程要在一类受限的坐标系下考虑，这是借助度规张量场的四个方程所构成的坐标条件实现的。

所谓坐标条件，就是规范条件。

例如 de Donder gauge: $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}=0$

规范场论~微分几何

1917年，列维-齐维塔(Tullio Levi-Civita, 1873-1941):

黎曼导数$(\nabla_\mu)^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta \partial_\mu + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}$和黎曼张量$R^\alpha_{\mu\nu\beta} = (\nabla_\mu, \nabla_\nu)^\alpha_\beta$的不变性只由联络

(connection) $\Gamma^\alpha_{\mu\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}(\partial_\mu g_{\beta\sigma} + \partial_\beta g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\beta})$的坐标变换决定：

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \to \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\gamma}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha},$$

这样的变换(第二项)带来了规范场论以及推广黎曼几何的故事。在引力理论中这个联络是由度规导出的，但是**联络可以当作独立的、本原的量**。任意函数，**只要满足上述坐标变换，就可以当作联络**。**由一个广义的联络$\Gamma^\alpha_{\mu\beta}$，定义协变微分$(\nabla_\mu)^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta \partial_\mu + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}$，就有针对特定联络的微分几何**。如果没有与之匹配的度规$g_{\mu\nu}$，那就当作非黎曼几何好了。

规范场论~微分几何

度规 $g_{\mu\nu}$，引力势，是一个不变微分二次型$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$里的系数，而电磁势4-矢量$A_\mu$是一个不变的线性微分形式 $d\varphi = A_\mu dx^\mu$里的系数。它们从未被放到一起考虑过，尽管爱因斯坦就是用电磁相互作用的洛伦兹变换来要求广义相对论的。熟悉微分几何的**数学家外尔**敏锐地注意到了**这里有物理**—它是否提供一个**统一电磁学和引力理论**的切入点吗？

$just\ like\ x^2 = c_1,\quad bx = c_2,$ 如何叠加、兼容？

规范场论

联络
Connection

黎曼几何可以用平行移动自然地表述。

矢量ξ^i 从一点移到临近的一点变成 $\xi^i + d\xi^i$ $\quad d\xi^i = -\Gamma^i_{rs} dx^s \xi^r$

平行位移造成的矢量内积之比为$1 + d\varphi$，$\quad d\varphi = \varphi_i dx^i$

联络依赖于二次型$(ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k)$，还依赖于线性形式$d\varphi = \varphi_i dx^i$。
这是个有趣的数学形式上的发现，也就外尔这样的数学家会注意到。

$$g_{ik} dx^i dx^k \rightleftharpoons \varphi_i dx^i$$

$$\lambda g_{ik} dx^i dx^k \rightleftharpoons \varphi_i dx^i + d(ln\,\lambda)$$

描述同样的几何，而与$\varphi_i dx^i$对应的不变量是$F_{ik} = \partial\varphi_i/\partial x_k - \partial\varphi_k/\partial x_i$，

这在电磁学中出现过。把φ_i理解成电磁势矢量，**电磁场是引力伴生现象？**

规范场论

在黎曼几何中，平行移动过程中矢量的值是不随路径改变的。

引入广义联络。在时空联络之外再引入一个4-矢量场$v_\mu(x)$，即将联络改造为

$$\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}(g_{\mu\sigma}v_\nu + g_{\sigma\nu}v_\mu - g_{\mu\nu}v_\sigma),$$

矢量依据这样的联络平行移动，长度经移动后会获得尺度因子$e^{\int_{x_1}^{x_2} v_\mu(x)dx^\mu}$。

规范第一次被引入微分几何。因为相关的微分几何牵扯到长度的量度问题，当然是规范(gauge，本义是尺规)的事情。

外尔选取矢量$v_\mu(x) = \frac{e}{\gamma} A_\mu(x)$以联系上**电磁学**

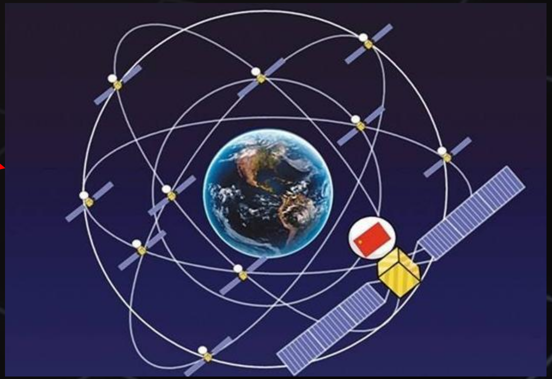
规范场论

Eiche, eichen,
校验
Gauge, Calibration
Scale, Scalar

$q=r+\vec{v}$

庞加莱， Bureau des Longitudes，法国巴黎长度标准局

?



爱因斯坦，Patentamt Bern， 瑞士伯尔尼专利局

庞加莱，爱因斯坦，外尔：思考的都是如何测量的深层问题
测量就有校准，就有相对论和规范场论。
说得清中国杆秤的道理，你就懂得了物理学的一半。

规范场论

外尔的引力规范理论还能让我们从规范场的视角重新审视电磁理论，这个理论很神奇，很有道理。但是，时空的量度要因为电磁场的存在而改变尺度，即存在关系

$$\ell = \ell_0 e^{\int_{x_1}^{x_2} \frac{e}{\gamma} A_\mu(x) dx^\mu},$$

这一点却让人很难接受。

Q1. 谁来拯救这个理论？

A1. Schrödinger, London, Fock

Q2. 拿什么拯救？

A2. 拿(老-新)量子力学啊！

爱因斯坦对外尔的论文就直接提出异议：“如果这个理论的是对的，那原子的性质就必须是历史(路径)依赖的…… Da dies nicht der Fall ist, scheint mir die Grundhypothese der Theorie leider nicht annehmbar, deren Tiefe und Kühnheit aber jeden Leser mit Bewunderung erfüllen muß.”

高情商

Gravitation und Elektrizität, Sitzungsber. Preuss. Akad. Berlin. 465-478(1918).
Eine neue Verweiterung der Relativitätstheorie, Ann. Phy. 59, 101-133(1919).

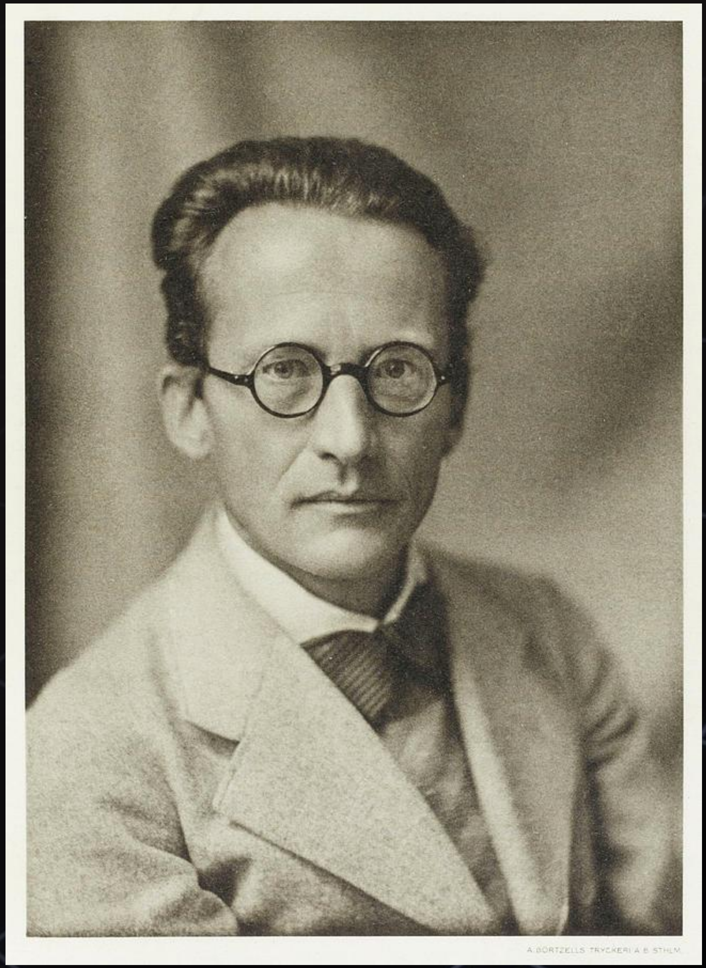
规范场论

(氢原子)能量谱的量子化条件，$J = 2\tau\bar{T} = nh$, 其中$\bar{T}$是系统在一个周期内的平均动能，可以使得$e^{-\frac{e}{\gamma}\int A_\mu dx^\mu}$中的指数对于系统的一个周期积分近似地是$\gamma^{-1}h$的整数倍，即 $e^{-\frac{nh}{\gamma}}$。如果电子沿轨道的运动带来“长度”的变化，每个周期过后时空有“长度”变化$e^{-\frac{h}{\gamma}}$，很难相信这是量子化条件的偶然数学结果而没有深刻的物理意义。

假设 $\gamma = \frac{h}{2\pi\sqrt{-1}}$， 变化因子变成了模为1的**复数**，就能有效避免所谓的电子运动带来的“长度”变化了。

Erwin Schrödinger, Über eine bemerkenswerte Eigenschaft der Quantenbahnen eines einzelnen Elektrons (关于单电子量子轨道的一个值得注意的特性) , 1922.

后来高论，当时不过
凑！凑！凑！
-曹则贤 《钗头凤》



Erwin Schrödinger, 1887-1961

规范场论

薛定谔方程，1926

$$i\hbar\partial\psi/\partial t = H\psi \qquad -i\hbar\partial\psi/\partial t = H\psi$$

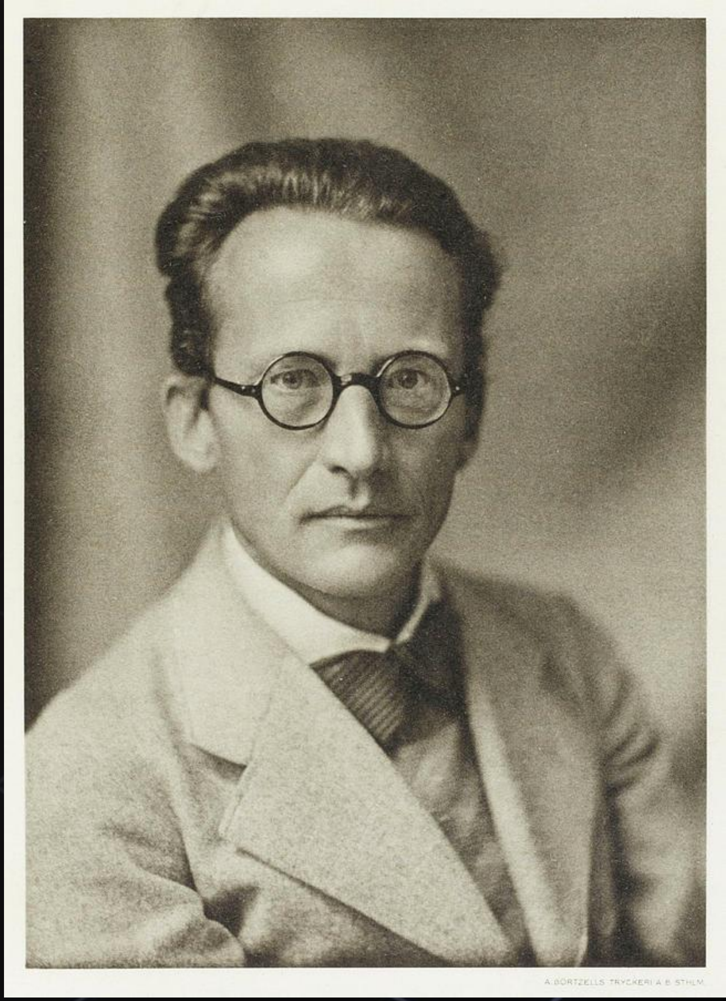
对于氢原子 $$\mathrm{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

外尔解的

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}}\, e^{-\frac{\varrho}{2n}}\left(\frac{\varrho}{n}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{\varrho}{n}\right) Y_l^m(\theta,\varphi)$$

佛曰：帮同侪就是帮自己！

Quantisierung als Eigenwertproblem (量子化是本征值问题)”，
1926， 四部分共140页. 参阅 曹则贤《磅礴为一》.



Erwin Schrödinger, 1887-1961

规范场论

1926年，福克(Vladimir Fock)将经典电磁学的规范理论拓展到与电磁场相互作用的带电粒子的量子力学中去，为此引入了如下变换

$$A \rightarrow A' = A + \nabla\chi$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}$$

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi\, exp(ie\chi/\hbar c)$$

相较此前Lorenz规范变换添加了变换$\psi \rightarrow \psi' = \psi\, exp(ie\chi/\hbar c)$。

这意味着电磁势的规范变换伴随波函数(电荷场)的变换$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{i\theta}$，波函数多出个相因子$e^{i\theta}$，而$e^{i\theta}$是U(1)群的表示。

Влади́мир Алекса́ндрович Фок
1898-1974

1927年，“论带电粒子之波与运动方程的不变形式”。这篇论文是1926年7月24日从列宁格勒寄出的，该文第一个词就是薛定谔方程，可见他做这篇论文所用时间之短。

规范场论

伦敦 (Fritz London) 1927年2月25日提交了“外尔理论的量子力学诠释”一文，把外尔引入的尺度变换同德布罗意波动力学联系起来，明确指出尺度因子的形式为$e^{\frac{2\pi i}{h}\int \frac{e}{c}\Phi_i dx^i}$，即$\gamma = i\hbar$，这样尽管路径是不可积的，但是在每一点上的规范尺度(gauge-measure)是唯一的。这一下子显得外尔的理论包含了通往波动力学的逻辑之路。不可积因子同电磁理论联系没有问题，但是不应该当作时空的尺度因子，而应该是当作波动力学的相因子。伦敦最了不起的地方是，他在文末强调薛定谔1922年就指出了这一点，只是当时未能认识到它的重要性而已，绝无抢占优先权的想法。

伦敦兄弟有关于超导的London equations.

Fritz London, 1900-1954

Heinz London, 1907 -1970

规范场论

1929，外尔换个角度看广义相对论

引入 Tetrad (Vierbein, 四条腿) e^a_μ

$$\eta_{ab}e^a_\mu(x)e^b_\nu(x) = g_{\mu\nu}(x)$$

Tetrad 有16个分量， $g_{\mu\nu}$ 只有10个分量

$T_{\mu\nu}$

如果对Tetrad 作变换，

$$e'^a_\mu(x) = h^a_b(x)e^b_\mu(x)$$

发现其必满足要求

$$h^a_c(x)\,\eta_{ab}h^b_d(x)=\eta_{cd}$$

这说明变换 h 就是局域 Lorentz 变换

1954年这个变换重出江湖

Internal version of 联络的变换方式为

$$\Gamma'_\mu = h^{-1}\Gamma_\mu \mathrm{h} + h^{-1}\partial_\mu \mathrm{h}$$

规范场论

U(1) 规范对称性意味着电荷守恒

$$L = \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - m)\psi - ne\bar{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi - \frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}$$

$$\bar{\psi} = i\gamma^{2}\psi^{*}$$

$$j^{\mu} = ne\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$$

与对称性有关的结果

守恒流

$$\partial_{\mu}j^{\mu} = 0$$

Noether 1918: 从拉格朗日量密度的对称性到守恒流

不同的作用量形式或有其他讨论

规范场论

外尔在1928年的群论与量子力学(Gruppentheorie und Quantenmechanik)一书和 1929年的两篇论文中干脆将电磁作用带来的尺度因子改称为相因子(phase factor)。相因子同路径有关，这埋下了存在拓扑相位的伏笔。1929年，在薛定谔、伦敦等人指出选择$\gamma = i\hbar$可将外尔几何同量学联系起来、福克给出电磁同波函数结合的规范变换之后，外尔发表了世纪经典长文“电子与引力 I”，算是奠立了规范理论 (把spinor加入了引力理论)。

有了规范场论，我们理解了电荷守恒对应相位对称性。

Electromagnetism is non-integrable phase factor
电磁是不可积相因子
——杨振宁

尴尬，引力理论和电磁理论有规范自由度，连物理所的保洁都知道。规范理论进入沉睡状态！

Weyl， Elektron und Gravitation. I.，Zeitschrift für Physik 56, 330-352(1929).

波动力学的一般性原理，1933

1927年，泡利写出电磁场中电子的量子力学方程

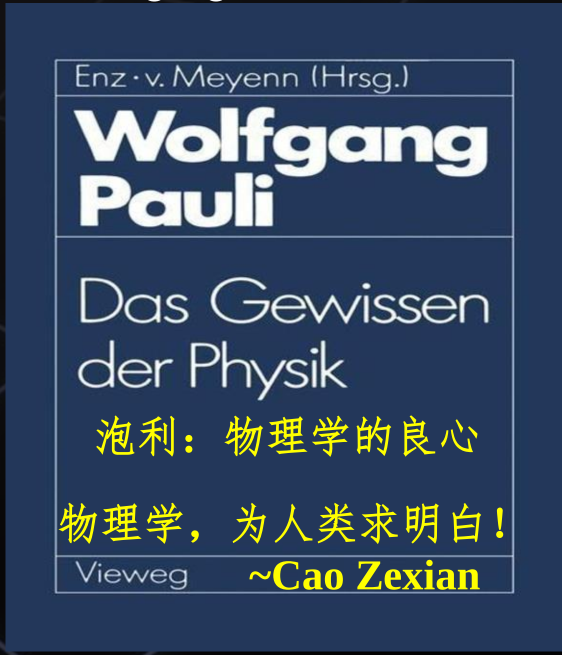
1929年，外尔发表英文的论规范场论短文，遭泡利讽刺‘咋的，您老也干物理？’

泡利这个猛人在理解了外尔的思想后一通表述发表在1933年的Handbuch der Physik 上，让很多读书不仔细的人以为规范场论是他提出来的。

规范场论 (电磁、引力)~波动力学。

没事咧？

Wolfgang Pauli, 1900-1958



泡利：物理学的良心

物理学，为人类求明白！

~Cao Zexian


暴风雨在酝酿之中

规范场论

海森堡的成就：

1. Matrix mechanics (矩阵力学)
2. Uncertainty Principle (不确定性原理)
3. Ferromagnetism (铁磁性)
4. Isospin (同位旋)
5. Exchange interaction (交换作用)

Werner Heisenberg, 1901-1976

1932年，James Chadwick (1891-1974)发现中子，海森堡在1932，1933迅速完成关于neutron-proton model of the nucleus 三篇论文, 提出了**同位旋**概念。

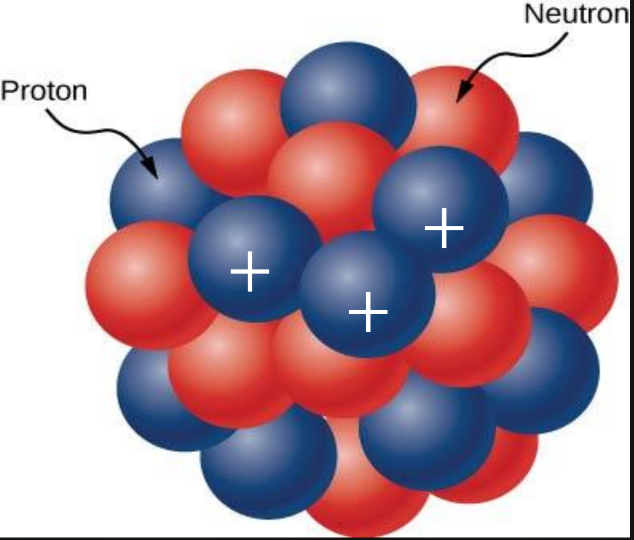
SU(2), 四元数

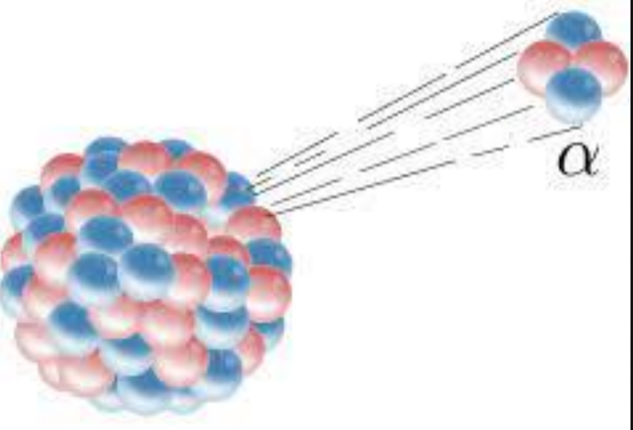
operand

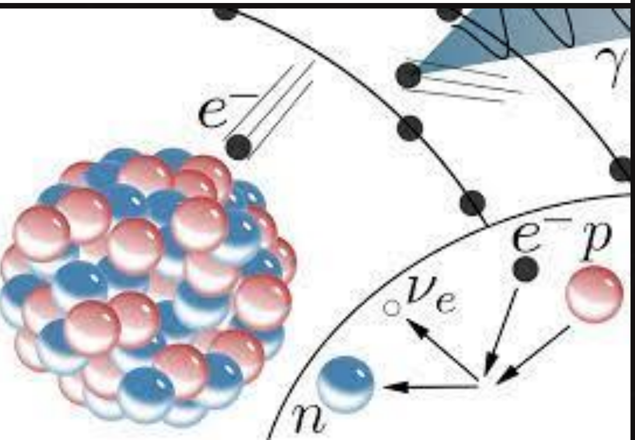
介子三重态 $(\pi^+,\ \pi^0,\ \pi^-)$

$$\Psi=\begin{pmatrix}\psi_n\\ \psi_p\end{pmatrix}$$

Über den Bau der Atomkerne, I，Z. Phys. **77**，1–11(1932); II, 78, 156-164(1932); III, 80, 587-596(1933).







原子核物理

原子核由带正电的质子和不带电的中子紧密团结在一起组成的

1. Q: 同种电荷咋靠那么近？
   A: **强相互作用**造成的;
2. Q: 老跑出来质子、中子、α粒子，里面有好理解。为啥那么快呢？
   A:有质能关系$\Delta E = c^2 \Delta m$；
3. 为什么跑出电子啊？里面没有啊.
   A: **弱相互作用**；
4. Q: 为什么还发射光子？
   A: 有电荷啊，**电磁作用。**

强相互作用，电磁作用，弱相互作用，都挤在一个小旮旯里(10^{-15}m)，那得是同一个存在的不同侧面吧？

哈东西离远了看、懒得看都是统一的。

规范场论

Oscar Klein in 1938 proposed a boson-exchange model for charge-charging weak interactions (radioactive decay), after a similar proposal by 汤川秀树(Hideki, Yukawa, 1935). The model was based on a local isotropic gauge symmetry and anticipated the later successful theory of Yang-Mills.

Oskar Klein (1894–1977)

此文foreshadows

1. SU(2) 规范理论
2. 粒子质量起源的Higgs 机制
3. 规范群 SU(2) x U(1)
4. 电弱相互作用的统一。

千不该，万不该，不该是用**法语**发表的。

Oscar Klein, Sur la theorie des champs associes a des particules chargées (带电粒子场论), 1938

规范场论

Oskar Klein (1894–1977)

Klein 的5维度规张量里多出来的内容其实是规范场

$$g_{\mu 0}(x) = \beta \chi_\mu(x)$$

Covariant derivative for isospinor field $D_\mu = \partial_\mu + ie\chi_\mu\left(\frac{1-\sigma_3}{2}\right)$

Pauli matrices

$$\chi_\mu(x) = \begin{pmatrix} A_\mu(x) & \tilde{B}_\mu(x) \\ B_\mu(x) & A_\mu(x) \end{pmatrix} = \sigma_3\left(A_\mu(x)\cdot\sigma\right)$$

SU(2)

$$\chi_\mu = \begin{pmatrix} A_\mu - C_\mu & \tilde{B}_\mu \\ B_\mu & A_\mu + C_\mu \end{pmatrix} = \sigma_3\left(A_\mu\cdot\sigma - C_\mu\right)$$

SU(2)×U(1)
曹：massive
电子是桥梁

有一种学霸，学问超越了时代，还超越了自己的理解能力。

Oscar Klein, Sur la theorie des champs associes a des particules chargées (带电粒子场论), 1938

微分几何

Levi-Civita
Cartan
De Rahm
Witney
Hodge
Chern S. S.
Steenrad
Ehresmann
1950年代, Fibre bundle

1938 Oscar Klein SU(2)
1974年 杨的引力规范，
1974年 Wilczek渐近自由度

相互作用(力)→加速度→引力→几何

相互作用→几何理论
牛顿第二定律是二阶微分形式，那还能是什么几何呢？微分几何啊

可怜的力，被踢出去力学两回。一次是1894年，Hertz的新力学，一次是1915-1929年的广义相对论~规范场论，有了相互作用的几何理论，物理学中再也没有力的地位了。

Purely geometric restrictions on the structure of space-time.

爱因斯坦-外尔-薛定谔

1950年

“Affine connexion or affinity”, It is not a good name. —Schrödinger in space time structure.

1. 未连接的流形的一般坐标变换已经有affine transformation. 2. 克里斯多弗symbol 表示的不是近邻点之间的任意的affine relationship, 而是一个特殊的联络。纤维丛理论就是从联络 出发的。不同的联络-不同的微分几何

So much for explaining and criticizing the terminology- Schrödinger

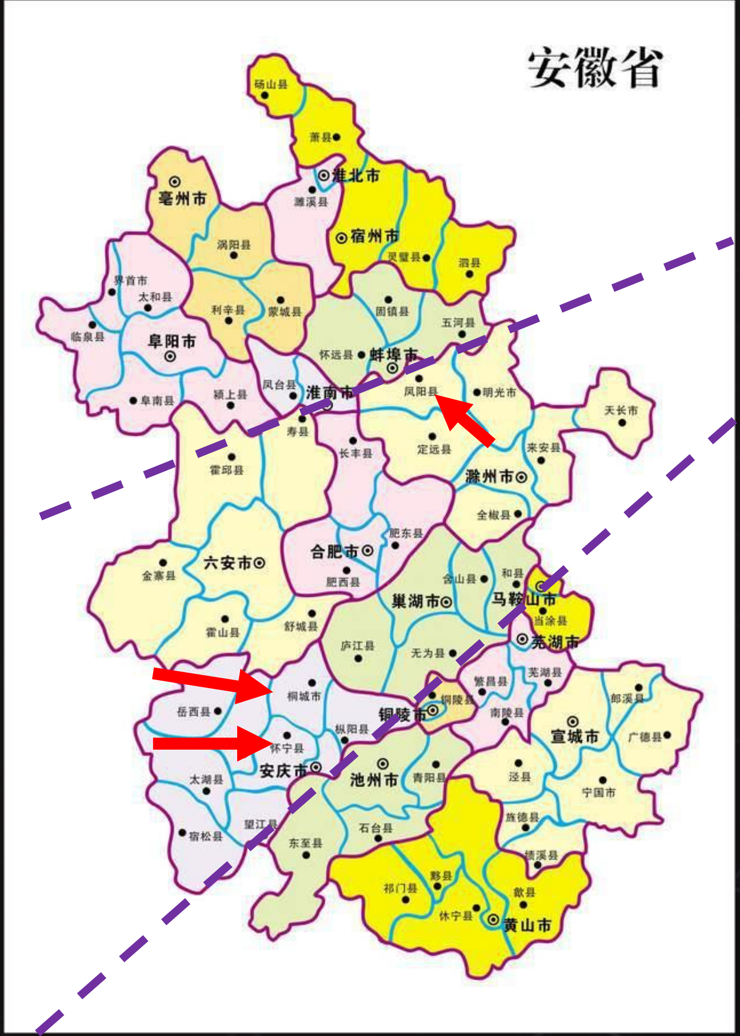
规范场论

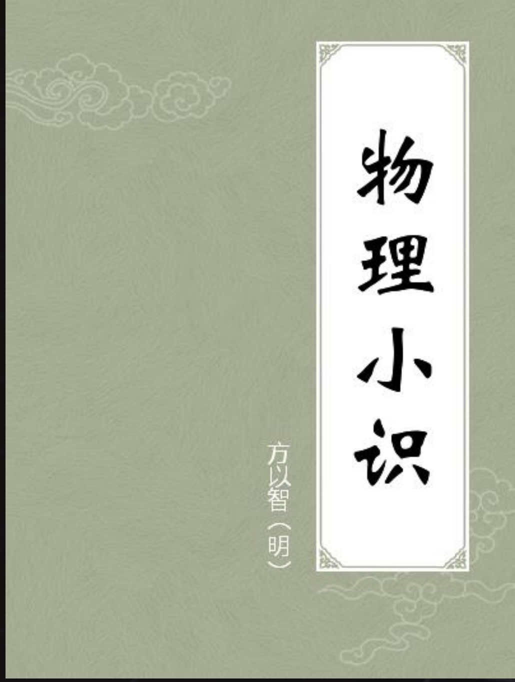
1643年，安徽桐城人方一智(1611—1671)出版《物理小识》；

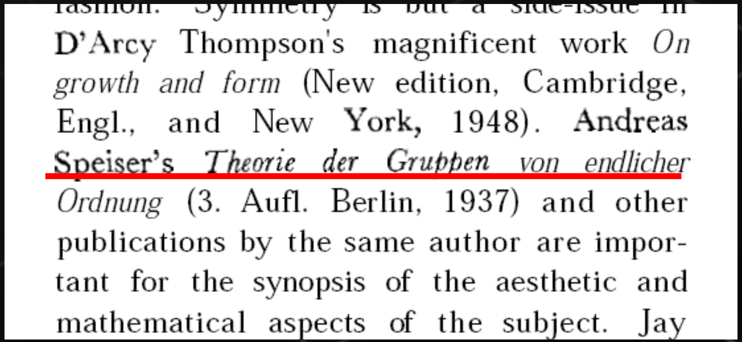
1823年， 安徽凤阳人杨克纯(1896-1973)考取安徽公费留学生，在美国芝加哥大学获得数学硕士和博士。1929-1949年任清华大学数学教授。

1922年，杨克纯长子杨振宁(1922-）出生于安徽怀宁(时杨克纯在安庆任教)，1945年杨振宁赴美国芝加哥大学攻读物理博士。

约在1938年，杨振宁先生读中学，其父建议读Andreas Spencer 的Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung (有限群理论，1937)一书，而该书赫然出现在外尔 Symmetry (1952)一书的作者序中。






fashion. Symmetry is but a side-issue in D'Arcy Thompson's magnificent work *On growth and form* (New edition, Cambridge, Engl., and New York, 1948). Andreas Speiser's *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* (3. Aufl. Berlin, 1937) and other publications by the same author are important for the synopsis of the aesthetic and mathematical aspects of the subject. Jay


杨振宁先生 (1922-----)

Q: 什么样的人是著名科学家?
A: 让自己的姓氏进入科学的人。

a) 姓和某个理论、方程、概念绑定了

Einstein’s relativity, Noether theorem，
Euler equations, Dirac Matrices, Weyl spinor

杨振宁先生 (1922--)

b) 姓被改造了

Newton→ Newtonian
Lagrange→ Lagrangian
Laplace→ Laplacian
Hamilton → Hamiltonian
杨(Yang) → Yangian Y(a)

$[I_i, I_j] = C_{ij}^k I_k$

$[I_i, J_j] = C_{ij}^k J_k$

c) 姓被改造了，还可以小写

Abel → abelian

Niels Abel， 1802-1829

规范场论

1). Yang & Mills, Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance, Phys. Rev. 96, 191-195 (1954).

同位旋守恒与同位旋规范不变性

2). Yang, Integral formalism for gauge fields, Phys. Rev. Lett. 33, 445-447(1974).

规范场的积分表述

3.) Tai Tsun Wu and Chen Ning Yang, Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields, Phys. Rev. D 12, 3845 -3857(1975).

不可积相因子与规范场的全局表示

规范场论

同位旋守恒与同位旋规范不变性

粒子的标签： **m, s, q, I**

电荷 →电磁场→光(量)子

$$\begin{pmatrix} n^0 \\ p^+ \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^+ \end{bmatrix}$$

I=1/2 *I=1*

All interactions be invariant under independent rotation of isotopic spin at all space-time point. Local in character

Isotopic gauge, 选取同位旋方向是局域任意的。

$\psi' = S^{-1}\psi$ 引入B-场来抵消局域变化： 一个3维2×2 矩阵矢量。

$\psi' = S^{-1}\psi$， 微分形式引入B场： $(\partial_\mu - i\epsilon B_\mu)\psi$

要求： $S(\partial_\mu - i\epsilon B'_\mu)\psi' = (\partial_\mu - i\epsilon B_\mu)\psi$ $B'_\mu = S^{-1}S + i/\varepsilon S^{-1}\partial_\mu S$

$F_{\mu\nu} = \partial_\nu B_\mu - \partial_\mu B_\nu + i\varepsilon[B_\mu, B_\nu]$ $F'_{\mu\nu} = S^{-1}F_{\mu\nu}S$

规范场论

同位旋守恒与同位旋规范不变性

$$\begin{pmatrix} n^0 \\ p^+ \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^+ \end{bmatrix}$$

I=1/2　　*I=1*

同位旋不同的粒子，对应不同的S表示罢了。

同位旋角动量

$$B'_\mu = S^{-1} B_\mu S + i/\varepsilon S^{-1}\partial_\mu S \rightarrow T$$

$$B_\mu = 2\varepsilon b_\mu \cdot T \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\nu b_\mu - \partial_\mu b_\nu - 2\varepsilon\left[b_\mu, b_\nu\right]$$

听同处低层次的人描述低处的风景，收获的是一脑子浓稠糊涂酱；
听处在高层次的人描述低处的风景，收获的是有点儿稀的糊涂酱；
欲看清楚低处的风景，请**劳驾亲自登高**。

规范场论

Yang，Integral formalism for gauge fields，1974. Electromagnetism is a nonintegrable phase factor.

基于替代 $\partial_\mu \to \partial_\mu - ieB_\mu$ 此乃规范理论的 differential formulations

一个流形，坐标x^μ；一个规范群，李群，生成元为 X_k (k=1,2,…m)。
定义路径依赖的(不可积的)相因子φ_{AB}作为同路径AB相联系群G的元素，故有$\varphi_{ABC} = \varphi_{AB}\varphi_{BC}$。
考察无穷小路径：$\varphi_{A\to A+dx} = I + b_\mu^k X_k x^\mu$，小量正比于位移、群生成元和耦合常数，即所谓的 gauge potential, 也即是联络。

基于上述基本思想。闭合(平行四边形)路径，相因子为$\varphi_{ABCDA} = I + f_{\mu\nu}^k X_k x^\mu x'^\nu$，正比于面积，群的生成元和规范场强，$f_{\mu\nu}^k = \frac{b_\mu^k}{x^\nu} - \frac{b_\nu^k}{x^\mu} - b_\mu^i b_\nu^j C_{ij}^k$，结构因子是李群结构因子，$X_iX_j - X_jX_i = C_{ij}^k X_k$.

规范变换 就是$\varphi_{AB} \to \varphi'_{AB} = \xi_A \varphi_{AB} \xi_B^{-1}$；$\varphi_{ABCDA} \to \varphi'_{ABCDA} = \xi_A \varphi_{ABCDA} \xi_A^{-1}$

有$f_{\mu\nu}^k{}' = \langle k|R_{ad\ j}|j\rangle f_{\mu\nu}^j$, R_{ad}是群元素ξ_A的adjoint representation, $f_{\mu\nu}^k$是规范协变的。规范场不是。

规范场论

规范协变微分：标量场的微分 $\psi^M_{:\ \mu} = \frac{\partial \psi^M}{\partial x^\mu} + b^k_\mu \langle M|Z_k|N\rangle \psi^N$；多出的项包括函数本身、对称性生成元表示和规范势。规范场强的微分满足Jacobi identity,

$f^k_{\mu\nu:\lambda} + f^k_{\nu\lambda:\mu} + f^k_{\lambda\mu:\nu} = 0$，称为gauge-Bianchi identity

由场强，可定义4-vector 守恒流密度，$j^k_\mu = g^{\nu\lambda} f^k_{\mu\nu:\lambda}$； 有 $g^{\mu\lambda} j^k_{\mu:\lambda} = 0$。
返回头引入黎曼度规，去和引力建立起联系。

规范场论

杨振宁先生1954年报告该项工作时，泡利赫然坐在前排。
Pauli问同位旋粒子质量问题如何解决的？“that is not a sufficient excuse”场面恐怖。
第二天，泡利建议杨振宁先生去看Schrödinger 1932年的文章。

Diracsches Elektron im Schwerefeld I (重力场中的狄拉克电子)，Sitz. der Preuß. Akad. der Wiss. Physikalisch-mathematische Klasse, 105-128(1932).

L’électron de Dirac dans la theorie de la relativité générale (广义相对论中的狄拉克电子)，Comptes Rendus, 581-591 (1932)

杨先生(时年32岁)可能没读过Oscar Klein的文章，否则也不会被**Wolfgang Pauli**难为了.
此文发表后，杨先生见过外尔，也没谈论这个理论，也是物理学史上的趣事.

规范场论

Schwinger (1918-1994), 1953

$\psi'(x)$=exp(-i$\lambda(x)\epsilon)\psi(x)$

是个矩阵
如何？

Ronald Shaw (1929-2016)， 1954
从 SO(2) ~ U(1)/Z_2 直接推广到SU(2)，其实
就是复数的2×2矩阵表示的数系扩展

Ronald Shaw at 2005

栗一： 空间E_2

$$L_0=\frac{i}{2}\left(\psi_j B\gamma_\alpha\partial^\alpha\psi_j-\partial^\alpha\psi_j B\gamma_\alpha\psi_j\right)+\mathrm{i}m\psi_j B\psi_j,\quad j=1,2$$

变换不变 $\psi_1'=\psi_1-c\psi_2$ $\psi'_2=c\psi_1+\psi_2$

c是局域
的呢？e

流密度和总荷： $s^\alpha=ie(\psi_1 B\gamma^\alpha\psi_2-\psi_2 B\gamma^\alpha\psi_1)$，$Q=\int s^\alpha\, d\sigma_\alpha$。

J. S. Schwinger

规范场论

Ronald Shaw at 2005

栗一：空间E 2

$$L_0=\frac{i}{2}\left(\psi_j B\gamma_\alpha\partial^\alpha\psi_j-\partial^\alpha\psi_j B\gamma_\alpha\psi_j\right)+\mathrm{i}m\psi_j B\psi_j,\quad j=1,2$$

变换不变局域化 $\psi_1'=\psi_1-c(x)\psi_2$ $\psi'_2=c(x)\psi_1+\psi_2$

广义规范变换下 在$L_o\rightarrow L_0'=L_0-i\partial_\alpha c(\psi_1 B\gamma^\alpha\psi_2-\psi_2 B\gamma^\alpha\psi_1)$

为此引入拉格朗日量 $L_1=-A_\alpha s^\alpha$

场A_α按如下方式变换 $A_\alpha'=A_\alpha+\frac{1}{e}\partial_\alpha c$

引入拉格朗日量$L_2=\frac{1}{4}f_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta}$，其中 $f_{\alpha\beta}=\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha$

总拉格朗日量$L=L_0+L_1+L_2$在这个广义规范变换下不变。

规范场构造步骤

1. 出发点：场拉格朗日量及其对成群G;
2. 对称群局域化 G → G(x);
3. 引入对应的规范场，以及规范场同场相互作用项
4. 总拉格朗日量在G(x)变换不变。

规范场论

栗二：空间E $_3$

$$L_0 = \bar{\psi}(\gamma_\alpha \partial^\alpha + m)\psi \qquad \psi\text{是时空4-分量旋量和}E_3\text{空间2-分量旋量}$$

E_3 空间转动 $\varphi_j \to \varphi'_j = \varphi_j + c_{jk}\varphi_k$ 会带来变换 $\psi \to \psi' = (1 + \frac{1}{2} i c_j \tau_j)\psi$，其中 $c_j = \frac{1}{2}\varepsilon_{jkl}c_{kl}$。拉格朗日量对应同位旋流 $\vec{s}_\alpha = \frac{1}{2} i q \bar{\psi}\gamma_\alpha \vec{\tau}\psi$，同位旋荷为 $\vec{T} = \int \vec{s}_\alpha \, d\sigma^\alpha$。

变换不变局域化： $c_j(x) = \frac{1}{2}\varepsilon_{jkl}c_{kl}(x)$

为此引入规范场 $\vec{B}^\alpha$，其和流 $\vec{s}_\alpha$ 的耦合项为 $L_1 = -\vec{B}^\alpha \vec{s}_\alpha$。

场 $\vec{B}^\alpha$ 的变换为 $q\vec{B}'^\alpha = q(\vec{B}^\alpha - \vec{c} \times \vec{B}^\alpha) + \partial^\alpha \vec{c}$，

引入 $L_2 = -\frac{1}{4} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta}$，其中 $\vec{F}^{\alpha\beta} = \partial^\alpha \vec{B}^\beta - \partial^\beta \vec{B}^\alpha - q(\vec{B}^\alpha \times \vec{B}^\beta - \vec{B}^\beta \times \vec{B}^\alpha)$，

总拉格朗日量 $L = L_0 + L_1 + L_2$ 在这个广义规范变换下不变。 $\vec{j}^\alpha = \vec{s}^\alpha - 2q\vec{B}_\beta \times \vec{F}^{\alpha\beta}$

规范场论

1954，在汤川研究所报告他的规范场论，并用日语发表。

このため、1954年10月の楊とミルズの論文に対して発表が遅れ、プライオリティは得られなかった。プリンストン高等研究所へ赴任直後に楊-Millsの論文を知り愕然とし、一時発表を放棄するが、気を取り直しゲージ場の一般論として論文をまとめ直した。1955年Julyに Physical Reviewに受理され、翌1956年に出版された。その後は、大阪大学において、一般相対性理論や場の理論の講義を通じて、後進の育成に努めた。

内山菱友

Ryoyu Utiyama (1916-1990)

内山把规范原理由简单紧致李群的情形推广到广义李群的情形，构造了广义规范理论。

千不该，万不该，不该是用日语发表的.

Ryoyu Utiyama，Invariant Theoretical Interpretation of Interaction (相互作用的不变理论诠释), PR**101**, 1597-1607 (1956).

规范场论

Q:　　一个拉格朗日量，在刚性李群G下是不变的。那么，引入什么样的规范场，这个拉格朗日量才是在局域群 $G(x)$ 下是不变的？这个规范场如何在 $G(x)$ 下变换，新的拉格朗日量长什么样？

A: 规范场$A_\mu(x)$，一个时空矢量场，在李群的伴随表示里取值，使得导数 $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu(x)$ 是协变导数。与此同时，原来的物质场的拉格朗日量$L_m(Q(x), \partial_\mu Q(x))$得改造成$L_m(Q(x), R(D_\mu)Q(x))$的样子，其中$R(D_\mu)$是$D_\mu$在群G的表示中的表象函数.　　规范场的拉格朗日量$L_o(A_\mu)$是场强$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]$的函数。总拉格朗日量为此两个场的拉格朗日量之和。

如何做的工具都在Emmy Noether 1918的论文中了。

内山菱友

Ryoyu Utiyama (1916-1990)

Invariant Theoretical Interpretation of Interaction PR **101**, 1597-1607 (1956).

规范场论

假设电荷场的 $L(Q,Q_{,\mu})$在变换$Q\to e^{i\alpha}Q$，$Q^{*}\to e^{-i\alpha}Q^{*}$下是不变的，要求在相因子为$\alpha(x)$时系统 仍是变换不变的，则必须引入电磁场$A_\mu$。$L(Q,Q_{,\mu},A_\mu)$的变换不变性也决定了电磁场$A_\mu$的规范变换。

电磁场拉格朗日量$L_{em}=\frac{1}{4}f_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta}$，$f_{\alpha\beta}=\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha$

内山菱友

Ryoyu Utiyama (1916-1990)

推广它！

Invariant Theoretical Interpretation of Interaction PR **101**, 1597-1607 (1956).

规范场论

物质场的系统$Q^A(x)$，拉格朗日量$L(Q^A, Q^A{}_{,\mu})$在依赖于$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$的群G下的变换不变。将之推广为依赖于$\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x) \ldots \varepsilon_n(x)$的群$G'$之下的变换不变。

可将原来的$L(Q^A, Q^A{}_{,\mu})$直接改写成$L(Q^A, \nabla_\mu Q^A)$，其中$\nabla_\mu Q^A = \frac{\partial Q^A}{\partial x^\mu} - T^A_{(a)B} Q^B A^a_\mu$,

常系数T是具有李群特征的李代数，$[T_a, T_b] = f^c_{ab} T_c$，结构因子为$f^c_{ab}$，满足关系式$f^c_{ab} = -f^c_{ba}$

规范场的变换 $\delta A^a_\mu = S^{a}_{c\mu}{}^{\nu}{}_{b} A^b_\nu \varepsilon^c(x) + \frac{\partial \varepsilon^a(x)}{\partial x^\mu}$,

内山菱友

Ryoyu Utiyama (1916-1990)

要加上规范场的自由拉格朗日量L_0，其是场强

$$F^a_{\mu\nu} = \frac{\partial A^a_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^a_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2} f^a_{bc}\left(A^b_\mu A^c_\nu - A^b_\nu A^c_\mu\right)$$

Invariant Theoretical Interpretation of Interaction PR **101**, 1597-1607 (1956).

标准模型

四种基本相互作用：强、弱、电磁、引力
规范理论都适用

强相互作用：　SU(3)

弱相互作用：　SU(2)

电磁相互作用：　U(1)

引力：　$R^{1,3} \rtimes O(1,3)$

标准模型

$$\boldsymbol{SU}(3) \otimes \boldsymbol{SU}(2) \otimes \boldsymbol{U}(1)$$

Ausdehnungslehre
扩展的学问
Theory of extension

创造要有创造的context

创造有时候是强压牛头
喝水的过程

Ausdehnen，拓展/升华，to generalize/extend

自然数，整数，有理数(无理数），实数；二元数；四元数；八元数
一元二次方程，三次方程，四次方程，五次方程;一元无穷次方程
标量 (非极性，极性); 矢量；张量；赝标量，赝矢量；旋量；扭量
点的代数，线的代数，面的代数……
朴素相对论，伽利略相对论，狭义相对论，广义相对论
$A \times A$;　$\hat{\mathrm{O}}\,\psi$；$\mathrm{S}\psi\,\mathrm{S}^{-1}$；
有限群，李群
规范场论，广义规范场论

外尔

爱因斯坦

薛定谔

Eidgenosse Technische Hochschule, Zürich

如何面对德国的哥廷恩大学，法国的巴黎高师，瑞士的ETH， 奥地利的维也纳大学这等普通三本学校？

量子/相对论/规范场论奠基瑞士三人组： **爱因斯坦，外尔，薛定谔. Sie sind Eidgenosse!**

闵可夫斯基(1864-1909)，庞加莱(1854-1912

天才不过是受到了合格教育的正常人而已。

一个科学巨擘的成长哪里需要多少条件呢？不过是生来是那块料子，还碰巧生在有教养的人家，长在有文化底蕴的地方，年轻时上个能算是大学的大学，成年后身边有几个可相互砥砺的杰出同侪(Eidgenosse)罢了。

Extra Göttingam non est vita, si est vita non est ita.
哥廷恩之外没有生活，即便有也不是这样的

高斯，韦伯，黎曼，狄里希利，希尔伯特，克莱因，闵可夫斯基，诺特，外尔……

数学物理有思想的创造三人组

空间理论，线的代数，外代数，抛弃牛顿第三定律，，转动就是平移，矢量，内积，外积，光是纯粹的科学，代数是纯粹时间的科学，哈密顿量，拉格朗日量，分析力学，变分法，矢量分析，波动力学，射线光学，四元数，克里福德代数，物质附近空间是弯曲的，引力是弯曲以波的形式传播……

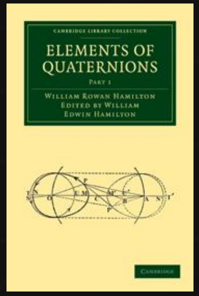
Hermann Graßmann, 1809-1877

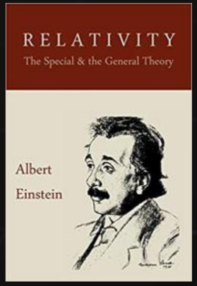
Sir William Rowan Hamilton 1805-1865

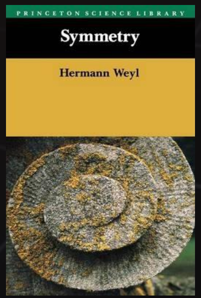
William Kingdon Clifford, 1845-1879

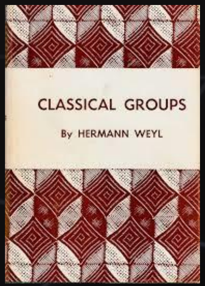
经典推荐

J. L. Lagrange	Réflexions sur la résolution algébrique des équations
Hermann Hankel	Vorlesungem über die complexen Zahlen und ihre Funktionen
W. R. Hamilton	Lectures on the quaternions, Elements of quaternions
Albert Einstein	Relativity: the special and general theory
Hermann Weyl	Symmetry; The classical groups; Raum-Zeit-Materie
Erwin Schrödinger	Spacetime structure

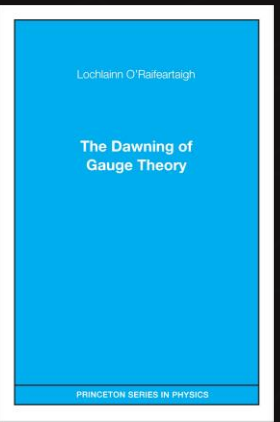


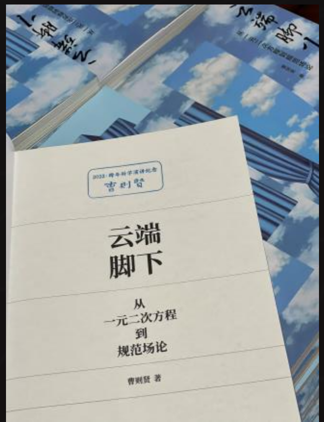






入门推荐





L. O'Raifeartaigh	The dawning of gauge theory
曹 则 贤	云端脚下-从一元二次方程到规范场论

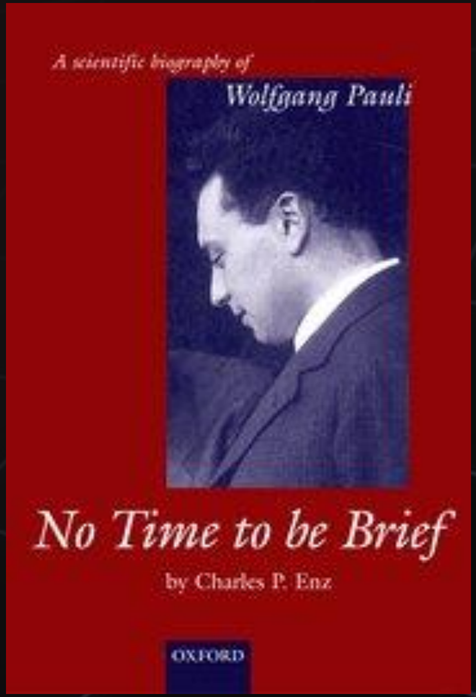
读厚重的书
学深刻的知识
做从前不会的事情

Je n’ai fait celle-ci plus longue que parce que je n’ai pas eu le loisir de la faire plus courte. —Blaise Pascal

这封信有点儿长，因为我没闲暇把它弄简短了

No time to be brief.

人生难再，不可以草率地、匆匆地辜负！



规范场论

相对论

量子力学

俱往矣，数正经学问，还看经典！

经典力学

热力学/统计力学

电磁学/电动力学


你把眼睛一蒙，世界就好理解啦！
学数学、学物理，要用inner sight！
我何良叹嗟，物理固自然。
-杜甫《盐井》
Q：毛驴拉磨为什么要蒙眼？
A：就是要让毛驴正确理解测地线理论，要认识到圆也是直线。

Sul mare Luccica l’astro d’argento.
露琪亚海面上，星星闪着银光

Placida è l’onda, prospero è il vento.
水波平和，熏风宜人

Venite all’agile barchetta mia,
来到我的小船上吧
Santa Lucia! Santa Lucia!
桑塔·露琪亚啊，桑塔·露琪亚！

希望有一天，有一批在这块土地上成长起来的、从小就愿意学习深刻学问的少年也能象杨振宁先生、李政道先生那样把学问做到巅峰，为人类的数学、物理做出不可磨灭的贡献。

那个时候，我们也唱起这首歌迎接他载誉归来。

《代笔贤妻》剧照：小合唱团到诺奖得主房间里演唱Santa Lucia

感谢大家的捧场
新年快乐！
脚下莫畏路途险，直上云端会有时

鸣　谢

中国科学院科学传播局

中国科学院物理研究所

北京电视台：　李 杰

中央电视台：　王雪纯

学习强国，人民日报客户端，新华网客户端，央视频APP, 抖音等平台，等等

愿更多的人在严肃地学习物理的过程中收获欢乐与智慧。

学物理、研究物理、教物理，物理所是认真的！


抖音
我的抖音号: 1056212636

云端脚下

这是一本视界垂直的书，讲述从一元二次方程、三次方程、四次方程到代数不可解的五次方程，引出复数与超复数、线性代数以及群论，最终成就了量子力学、相对论和规范场论的伟大历程，再现人类在数学和物理领域里三千余年的智慧结晶。这是一条从$ax^2+bx+c=0$ 到 $F_{\mu\nu}$=$[D_\mu, D_\nu]$再到$SU(3)\times SU(2)\times U(1)$的铺满鲜花与荆棘的索之路，每一个新时代的少年都不妨借此愉快地来一场挑战个人耐力与智力的朝圣之旅.